

Équation de Pell-Abel et applications

Quentin Gendron

22 février 2022

Abstract

In this paper, we show that there are solutions of every degree r of the equation of Pell-Abel on some real hyperelliptic curve of genus g if and only if $r > g$. This result, which is known to the experts, has consequences, which seem to be unknown to the experts. First, we deduce the existence of a primitive k -differential on an hyperelliptic curve of genus g with a unique zero of order $k(2g - 2)$ for every $(k, g) \neq (2, 2)$. Moreover, we show that there exists a non Weierstrass point of order n modulo a Weierstrass point on a hyperelliptic curve of genus g if and only if $n > 2g$.

Résumé

Dans cet article, je montrerai que l'équation de Pell-Abel possède une solution de degré r sur une courbe hyperelliptique de genre g si et seulement si $r > g$. Ce résultat est connu des experts, mais il possède des conséquences intéressantes, qui ne semblent pas connues. Tout d'abord, cela implique l'existence d'une k -différentielle primitive avec un unique zéro d'ordre $k(2g - 2)$ sur une courbe hyperelliptique de genre g pour tout $(k, g) \neq (2, 2)$. De plus, cela implique qu'il existe des courbes hyperelliptiques avec un point qui n'est pas de Weierstrass et qui est d'ordre n modulo un point de Weierstrass si et seulement si $n > 2g$.

Table des matières

1 Introduction	2
2 Équation de Pell-Abel et différentielle canonique	4
3 Les k-différentielles	14
4 Les points de torsion	18
Références	20

1 Introduction

Étant donné un polynôme complexe unitaire D de degré pair $2g + 2$ dont les zéros sont simples. L'équation de Pell-Abel associée à D est l'équation polynomiale

$$P^2 - DQ^2 = 1. \tag{1}$$

Une solution (P, Q) de cette équation est dite de *degré* r si le degré de P est égal à r . On dit qu'une solution de l'équation de Pell-Abel associée à D est *primitive* si son degré est minimal parmi les solutions distinctes de $(\pm 1, 0)$. Notons que l'on peut voir l'équation de Pell-Abel comme une équation sur la courbe hyperelliptique C_D de genre g définie par l'équation $y^2 = D(x)$.

Cette célèbre équation a été étudiée en profondeur dans différents contextes depuis son introduction par Abel [Abe26]. Dans cet article, Abel donne des conditions nécessaires et suffisantes sur le polynôme D pour que l'équation de Pell-Abel possède une solution. Cette équation a été par la suite réétudiée par Tchebychev [Tch54] en lien avec les polynômes qui s'écartent le moins possible de l'axe des abscisses sur une union d'intervalles. Cette étude a été approfondie par Achieser, Markoff, Zolotareff et beaucoup d'autres. On pourra par exemple consulter les textes [Bog12, Ser17, SY92] et les références de ces textes pour plus de détails. Sans prétendre à l'exhaustivité, il est intéressant de noter que cette équation est aussi apparue en lien avec la physique mathématique [BZ13], les systèmes dynamiques [McM06], les billards dans les ellipsoïdes [DR11] ou les points d'ordres finis sur les courbes hyperelliptiques définies sur le corps des rationnels [Pak98].

Solutions de Pell-Abel. Dans cet article je me propose tout d'abord d'étudier les degrés des solutions de l'équation de Pell-Abel sur certaines courbes hyperelliptiques. Une courbe hyperelliptique C_D est *totalelement réelle* si les racines de D sont contenues dans \mathbb{R} . Je vais en particulier montrer le résultat suivant.

Théorème 1. *Étant donné un entier $g \geq 1$.*

Il n'existe pas de courbe hyperelliptique totalement réelle de genre g telle que l'équation de Pell-Abel possède une solution de degré $r \leq g$.

Pour tout $r \geq g + 1$ il existe une courbe hyperelliptique totalement réelle C_D de genre g telle que l'équation de Pell-Abel possède une solution primitive de degré r .

Il est intéressant de noter que l'on montrera dans la section 4.2 qu'il n'existe pas de courbes hyperelliptiques de genre g qui possèdent une solution à Pell-Abel de degré $r \leq g$. Pour construire des solutions pour tout $r \geq g + 1$, j'utiliserai la théorie des différentielles abéliennes sur les courbes algébriques complexes (ou surfaces de Riemann). En effet, on peut associer une différentielle canonique à chaque courbe hyperelliptique définie par un polynôme D comme ci-dessus. Je montrerai que cette différentielle est étroitement liée à l'équation de Pell-Abel, ce qui me permettra de montrer le résultat ci-dessus.

Ce résultat est sans aucun doute connu des spécialistes. Des versions plus ou moins explicites de celui-ci peuvent se trouver dans [SY92], [Bog12] et surtout [Bog99]. Toutefois, comme l'écrit Serre [Ser17, paragraphe 2.5] à propos de résultats similaires : "Il n'est pas

facile de dire à qui ces théorèmes sont dus. L'une des difficultés est qu'ils sont rarement énoncés explicitement, et, du coup, ils ne sont pas démontrés en détails". Aussi je pense qu'il est intéressant d'énoncer clairement ce résultat important et de le prouver de manière relativement élémentaire.

Je vais maintenant donner deux applications intéressantes de ce résultat que je n'ai pu trouver dans la littérature. Les sujets que je vais aborder reflètent mes goûts et il est probable que des applications similaires à d'autres problèmes sont possibles.

Les k -différentielles. La première application du théorème 1 est au domaine des k -différentielles sur les surfaces de Riemann. Étant donné un entier $k \geq 1$, une k -différentielle est une section non nulle de la puissance tensoriel k ème du fibré canonique d'une surface de Riemann. Une k -différentielle est *primitive* si elle n'est pas la puissance d'une k' -différentielle avec $0 < k' < k$.

Un problème délicat est de savoir s'il existe des k -différentielles satisfaisant certaines propriétés. Dans cet direction, je montrerai le résultat suivant.

Théorème 2. *Soit $g \geq 2$ et $k \geq 1$, il existe une k -différentielle primitive avec un unique zéro d'ordre $k(2g-2)$ sur une courbe hyperelliptique totalement réelle de genre g si et seulement si $(g, k) \neq (2, 2)$.*

Notons que le théorème 1.4 de [GT17] donne l'existence de k -différentielles primitives avec un unique zéro sur des surfaces de Riemann de genre g , sauf dans le cas où $g = k = 2$. L'originalité du présent résultat est donc de donner l'existence de tels objets sur une courbe hyperelliptique. Le théorème 2 est une application directe du théorème 1 et de résultats élémentaires de géométrie algébrique.

De plus, ce théorème est un cas particulier d'un résultat plus général. On peut en effet se demander s'il existe des k -différentielles holomorphes primitives sur des courbes hyperelliptiques dont le diviseur est supporté sur des points conjugués par l'involution hyperelliptique. J'étudie ce problème dans la section 3.3. En particulier, la proposition 3.2 donne des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de telles k -différentielles.

Les points de torsion. La seconde application que je souhaite donner est au sujet des points de torsion sur les courbes hyperelliptiques. Étant donné une courbe hyperelliptique C et point de Weierstraß W de C , on considère l'application d'Abel-Jacobi $\varphi_W: C \rightarrow J_C$ qui envoie le point W sur l'origine de la jacobienne J_C de C . Un *point de n -torsion primitif* modulo W sur C est un point P tel que $\varphi_W(P)$ est un point de n -torsion de la jacobienne qui n'est pas de n' -torsion pour tout $0 < n' < n$. De manière équivalente, on dira que la différence $P - W$ est de n -torsion.

Théorème 3. *Soient $g \geq 2$ et $n > 2$. Il existe un point de Weierstraß W et un point P non de Weierstraß sur une courbe hyperelliptique totalement réelle de genre g tels que $P - W$ est de n -torsion si et seulement si $n > 2g$.*

De fait, je montrerai qu'il n'existe aucune courbe hyperelliptique de genre g avec un point de n -torsion primitif pour $2 < n \leq 2g$. De nombreux exemples de points de

n -torsion sont déjà connus (voir par exemple [BZ20, Lep97] entre beaucoup d'autres) et le théorème 3 est prouvé en genre 2 dans le paragraphe 4 de [BG02]. Toutefois, ce résultat ne semble pas connu pour $g \geq 3$. La preuve utilise des résultats classiques sur les surfaces de Riemann et la relation entre la différentielle canonique et l'équation de Pell-Abel détaillée dans la section 2.

Structure. Cet article est organisé de la façon suivante. Dans la section 2, je donne les rappels sur l'équation de Pell-Abel et la preuve du théorème 1 sur le degré des solutions. La section 3 est dédiée à l'application aux k -différentielles. Le théorème 2 et une généralisation de celui-ci y sont prouvés. Dans cette section, je donne aussi quelques rappels sur les k -différentielles, qui peuvent être utiles à la section précédente. Le théorème 3 est prouvé dans la section 4, après quelques rappels sur les points de n -torsion.

Remerciements. Cet article vient du mon envie de comprendre la partie liée aux différentielles abéliennes du séminaire Bourbaki de Jean-Pierre Serre [Ser17]. Je remercie donc Nicolas Bourbaki d'organiser son séminaire et de mettre les vidéos en accès libre sur internet. Je remercie Mikhail Sodin de m'avoir procuré une copie de la traduction anglaise de [SY92] et John Boxall pour avoir porté à ma connaissance certaines références. Enfin, je remercie Jean-Pierre Serre et Andrei Bogatyrev pour leurs commentaires bienveillants sur un brouillon de ce texte et le ou la rapporteur pour des suggestions qui ont améliorées la présentation de celui-ci.

2 Équation de Pell-Abel et différentielle canonique

Le but de cette section est de prouver le théorème 1 sur les solutions de l'équation de Pell-Abel. Pour cela, je commencerai par une discussion de cette équation et de la différentielle canonique sur les courbes hyperelliptiques totalement réelles. Elle s'inspire du paragraphe 2 de [Ser17]. D'autres bonnes références sur l'équation de Pell-Abel sont [Bog12] et [SY92], où de nombreuses sources sont données et [Bog99], dont la section 2 est proche de cette section.

2.1 L'équation de Pell-Abel sur les courbes hyperelliptiques

On fixe un entier $g \geq 0$ et on se donne $2g + 2$ nombres réels

$$a_0 < b_0 < a_1 < \cdots < a_g < b_g.$$

Pour chaque $j = 0, \dots, g$ on note $E_j = [a_j, b_j]$ et E la réunion des E_j . On définit le polynôme

$$D(x) = \prod_{i=0}^g (x - a_i)(x - b_i)$$

et la courbe hyperelliptique affine C_D^{aff} de genre g donnée par l'équation $y^2 = D(x)$. Sa complétée C_D s'obtient en lui ajoutant deux points à l'infini, que l'on note ∞_+ et ∞_- .

Ces points sont caractérisés par le fait que y/x^{g+1} prend respectivement la valeur 1 au premier et -1 au second. Une courbe hyperelliptique ramifiée uniquement au dessus de point réels, comme C_D , est appelée *totalemt réelle*. Notons que $D(x)$ est inférieur ou égal à 0 si $x \in E$ et strictement supérieur à 0 sinon.

L'algèbre affine de C_D^{aff} est un $\mathbb{C}[x]$ -module libre de base $\{1, y\}$. Après normalisation par une constante multiplicative, ses éléments inversibles sont de la forme :

$$f = P + yQ, \text{ avec } P, Q \in \mathbb{C}[x] \text{ et } P^2 - DQ^2 = 1. \quad (2)$$

On supposera que le polynôme Q est non nul. Cela revient à ne pas considérer les solutions triviales $(\pm 1, 0)$. L'équation $P^2 - DQ^2 = 1$ est appelée *équation de Pell-Abel*. Le degré d'une solution f est le degré de P . Pour un polynôme D fixé, on dira que f est une solution *primitive* si le degré de P est minimal parmi les solutions distinctes de $f = \pm 1$.

Remarque 2.1. Dans certaines sources l'équation de Pell-Abel est l'équation $P^2 - DQ^2 = c$, où $c \in \mathbb{C}^*$ et les polygones P et Q sont unitaires. Les deux formulations sont équivalentes et l'on passe de l'une à l'autre par normalisation multiplicative.

Une différence importante entre les équations de Pell et de Pell-Abel est que cette dernière n'a pas toujours de solutions non triviales. De façon plus précise, soit r un entier supérieur ou égal à 1. Il y a équivalence entre les deux conditions suivantes.

(i) L'équation (2) possède une solution de degré r .

(ii) Le diviseur $r(\infty_+ - \infty_-)$ de la courbe C_D est linéairement équivalent à 0.

On peut reformuler le point (ii) de la manière suivante. Soit J_D la jacobienne de C_D . Le diviseur $\infty_+ - \infty_-$ définit un point P_∞ de J_D . Le point (ii) signifie que $rP_\infty = 0$, autrement dit que P_∞ est un point d'ordre fini divisant r . De plus, cet ordre est égal à r si la solution est primitive de degré r .

En genre $g = 0$, le fait que $J_C = 0$ implique donc que l'équation de Pell-Abel a des solutions pour tout $r \geq 1$. Les solutions sont données par les polynômes de Tchebychev usuels P, Q respectivement de première et seconde espèce (modulo normalisation). Dans le cas $g = 1$, la jacobienne est égale à la courbe et l'existence de points de r -torsion pour $r \geq 2$ est claire. Si $g \geq 2$, il est facile de construire des exemples de courbes hyperelliptiques dont l'équation de Pell-Abel n'a pas de solution. Par exemple, dans le cas $g = 2$, s'il existe une solution primitive de degré r de l'équation de Pell-Abel sur C_D , alors il existe une r -différentielle primitive sur C_D avec un unique zéro d'ordre $2r$ en ∞_+ (voir la section 3 pour plus de détails). On sait par le théorème 1.1 de [BCG⁺19] que la dimension de l'espace des modules des r -différentielles primitives avec un unique zéro sur les surfaces de Riemann de genre 2 est égal à 3. Donc sa projection à l'espace \mathcal{M}_2 des surfaces de Riemann de genre 2 est de dimension 2 et les courbes hyperelliptiques qui possèdent des solutions primitives de degré r à l'équation de Pell-Abel forment des diviseurs (éventuellement non irréductibles) dans \mathcal{M}_2 .

2.2 La différentielle canonique

Je vais maintenant introduire la *différentielle canonique* sur une courbe hyperelliptique totalement réelle C_D , tout d'abord arbitraire puis telle que l'équation de Pell-Abel

possède une solution. Je souhaite souligner ici que cette différentielle n'est pas canoniquement associée à une courbe hyperelliptique abstraite C , mais qu'elle dépend du choix du polynôme D définissant la surface C . Quelques rappels sur les différentielles abéliennes sont donnés dans la section 3 et peuvent être utiles au lecteur peu familier avec cette théorie.

Différentielle canonique sur une courbe hyperelliptique totalement réelle. On se donne une courbe hyperelliptique totalement réelle C_D . Étant donné un polynôme unitaire $A \in \mathbb{R}[x]$ de degré g , on lui associe la forme différentielle $\eta_A = A(x)\frac{dx}{y}$ sur C_D . Cette forme est holomorphe ailleurs qu'en l'infini et possède un pôle simple en ∞_+ et en ∞_- , dont les résidus sont respectivement -1 et $+1$. Notons que η_A est une forme de troisième espèce et que changer A revient à ajouter à η_A une forme de première espèce, i.e. une différentielle holomorphe. Puisque l'espace vectoriel des différentielles holomorphes a pour base les formes $x^j\frac{dx}{y}$ avec $0 \leq j < g$, on en déduit qu'il existe un unique polynôme A tel que

$$\int_{b_{j-1}}^{a_j} \frac{A(x)}{\sqrt{D(x)}} dx = 0 \text{ pour } j = 1, \dots, g. \quad (3)$$

Ces intégrales sont les *périodes réelles* de η_A . Dans cette formule, on note $\sqrt{\cdot}$ la racine positive. Dans la suite, si t est négatif, on définit \sqrt{t} comme $i\sqrt{-t}$. On peut maintenant introduire l'objet central de cette section.

Définition 2.2. Le polynôme A satisfaisant l'équation (3) est le *polynôme canonique* de C_D et est noté R . La forme différentielle η_R est la *différentielle canonique* de C_D , que l'on notera simplement η .

La formule (3) dit que dans chaque intervalle intermédiaire $T_j = [b_{j-1}, a_j]$ l'intégrale de $\eta = R(x)\frac{dx}{\sqrt{D(x)}}$ est nulle. Cela entraîne que $R(x)$ change de signe dans T_j , donc s'annule en au moins un point intérieur de T_j . Comme le nombre d'intervalles T_j est égal au degré de R , on obtient le résultat suivant.

Lemme 2.3. *Le polynôme $R(x)$ a une racine et une seule à l'intérieur de chaque T_j et n'a aucune autre racine (réelle ou complexe).*

Comme les zéros de η sont les préimages des racines de R , le lemme 2.3 implique que la différentielle canonique η possède exactement $2g$ zéros simples. On note z_j le zéro de η dont la projection par l'application hyperelliptique appartient à l'intervalle T_j et tel que la partie réelle de l'intégrale de η de b_{j-1} à z_j est positive. Le zéro qui est conjugué à z_j par l'involution hyperelliptique est noté \bar{z}_j .

On s'intéresse maintenant aux $g + 1$ intégrales

$$\eta_j = \int_{a_j}^{b_j} \frac{R(x)}{\sqrt{D(x)}} dx = \int_{a_j}^{b_j} \eta, \text{ pour } j = 0, 1, \dots, g. \quad (4)$$

Les nombres $2\eta_j$ sont appelés les *périodes imaginaires* de la différentielle canonique η . Notons que comme R est un polynôme réel et $D(x) \leq 0$ pour $x \in E$, les parties réelles des η_j sont nulles.

Je vais maintenant énoncer une propriété importante satisfaite par les périodes imaginaires. Cette propriété est une conséquence du théorème des résidus et du fait que les résidus aux pôles de η sont ± 1 . Les détails sont donnés à la fin de la section 2.3 de [Ser17].

Lemme 2.4. *Il existe des signes $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$ tels que l'on ait :*

$$\sum_{0 \leq j \leq g} \varepsilon_j \eta_j = i\pi.$$

J'introduis maintenant les dernières quantités qui vont permettre de paramétrer les différentielles canoniques. Pour $j = 1, 2, \dots, g$ on définit les valeurs

$$\lambda_j = \int_{b_{j-1}}^{z_j} \eta = \int_{a_j}^{z_j} \eta. \quad (5)$$

On appelle les quantités $2\lambda_j$ les *périodes plates* de η . En effet, elles correspondent à l'intégrale de η entre les zéros \bar{z}_j et z_j . Notons que, comme la restriction de η à l'intervalle $]b_{j-1}, z_j[$ est strictement positive, les λ_j sont des nombres réels strictement positifs.

Différentielle canonique si l'équation de Pell-Abel a une solution. Jusqu'à présent, la discussion ne dépendait pas du fait que l'équation de Pell-Abel possède une solution sur C_D ou non. Dans la suite de ce paragraphe, je travaillerai sous l'hypothèse que cette équation possède une solution $f = P + yQ$ de degré r sur C_D .

Le premier résultat relie la solution de Pell-Abel à la différentielle canonique.

Lemme 2.5. *Soit C_D une courbe hyperelliptique totalement réelle telle que l'équation de Pell-Abel possède une solution $f = P + yQ$ de degré r . La différentielle canonique η de C_D est égale à*

$$\eta = \frac{1}{r} \frac{df}{f} \quad (6)$$

Démonstration. Il est clair que $\frac{df}{f}$ possède deux pôles simples en ∞_+ et ∞_- de résidus respectifs $-r$ et r . Pour prouver que $\frac{df}{f} = r\eta$, il suffit donc de prouver que les périodes réelles de la forme $\frac{df}{f}$ sont nulles. Pour $j = 1, \dots, g$, on considère f comme une fonction $f(x)$ sur l'intervalle $T_j = [b_{j-1}, a_j]$ en choisissant une détermination de y . Cela permet de considérer f comme une fonction $f(x)$ sur T_j . Comme cette fonction est réelle, et ne s'annule pas, on en déduit que $f(b_{j-1}) = f(a_j) = \pm 1$. L'intégrale de $\frac{df}{f}$ est donc la fonction $\log(f)$ qui prend les mêmes valeurs aux extrémités de T_j . Cela entraîne que l'intégrale sur T_j de sa dérivée est nulle et donc le lemme 2.5. C.Q.F.D.

On peut maintenant préciser le lemme 2.4 dans le cas où l'équation de Pell-Abel est résoluble sur C_D . Rappelons que $2\eta_i$ est la i ème période imaginaire de η .

Proposition 2.6. Soit C_D une courbe hyperelliptique totalement réelle telle que l'équation de Pell-Abel possède une solution de degré r et η sa différentielle canonique. Les $r_j = r|\eta_j|/\pi$ sont des nombres entiers qui satisfont l'équation

$$\sum_{0 \leq j \leq g} r_j = r. \quad (7)$$

Démonstration. Fixons l'un des intervalles $E_j = [a_j, b_j]$ avec $j = 0, \dots, g$. On considère f comme une fonction $f(x) = P(x) + iy_1(x)Q(x)$ sur E_j , où y_1 est la fonction $y_1(x) = \sqrt{-D(x)}$. Cette fonction est à valeurs complexes et de module 1. On peut donc l'écrire sous la forme $f(x) = e^{i\vartheta(x)}$ avec $\vartheta: E_j \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. On peut relever ϑ en une fonction continue $\theta: E_j \rightarrow \mathbb{R}$ en lui imposant sa valeur en a_j . Comme $f(a_j) = \pm 1$, cette valeur est de la forme $c_0\pi$, avec $c_0 \in \mathbb{Z}$. La valeur de f en b_j est alors $c_1\pi$ avec $c_1 \in \mathbb{Z}$. On a donc :

$$P(x) = \cos(\theta(x)) \text{ et } y_1(x)Q(x) = \sin(\theta(x)).$$

De plus, par le lemme 2.5 on a :

$$\int_{a_j}^{b_j} r\eta = \int_{a_j}^{b_j} \frac{df}{f} = i \int_{a_j}^{b_j} d\theta = i(\theta(b_j) - \theta(a_j)) = (c_1 - c_0)i\pi.$$

Le nombre $r_j = |c_1 - c_0|$ est donc un entier strictement supérieur à 0. Par le lemme 2.4, il existe des signes \pm tels que :

$$\sum_j \pm r_j = r. \quad (8)$$

Il reste donc à montrer que tous les signes sont positifs. Comme θ est strictement monotone sur E_j entre $c_0\pi$ et $c_1\pi$, son cosinus s'annule $|c_1 - c_0|$ fois. Cela implique que le nombre de racines de P dans E_j est r_j et comme P a au plus r racines, on a donc :

$$\sum_j r_j \leq r. \quad (9)$$

L'équation (7) est alors obtenue en comparant les équations (8) et (9). C.Q.F.D.

Une différentielle canonique satisfaisant l'équation (7) est dite de degré r . De plus, si les r_j sont premiers entre eux on dit que la différentielle η est primitive. On vérifie facilement que f est primitive si et seulement si la différentielle η est primitive.

La proposition 2.6 possède déjà des conséquences intéressantes sur les solutions de l'équation de Pell-Abel. En particulier, je souhaite faire la remarque suivante, qui se trouve dans le paragraphe 5.1 de [SY92].

Remarque 2.7. L'équation (7) implique qu'il n'existe pas de solution de degré $r \leq g$ de l'équation de Pell-Abel sur une courbe hyperelliptique totalement réelle de genre g . Ce résultat est valable pour toutes les courbes hyperelliptiques complexes comme je le montrerai dans la section 4.2.

La structure plate d'une différentielle canonique. Pour terminer la discussion des différentielles canoniques, je vais décrire la structure plate induite par une différentielle canonique η sur une courbe totalement réelle qui possède une solution à Pell-Abel de degré r . Cette structure est obtenue en intégrant η sur le complémentaire de ses pôles. Le lecteur non familier avec cette théorie pourra consulter la section 3.1 et les nombreuses références sur le sujet, comme par exemple [MT02].

Pour énoncer le résultat j'introduis la notion de peigne. Un *peigne* est une demi-bande horizontale avec des coupures horizontales. Plus précisément, soient $M \in \mathbb{N}^*$ et $g \leq M - 1$ des entiers naturels, on définit le peigne $\Pi_M(q_1, \dots, q_g; h_1, \dots, h_g)$ avec $q_1 < \dots < q_g$ des entiers contenus dans l'intervalle $[1, M - 1]$ et $h_i > 0$ par l'ensemble

$$\{\xi \in \mathbb{C} : \Re(\xi) > 0 \text{ et } 0 < \Im(\xi) < M\pi\} \setminus \bigcup_{j=1}^g \{\Im(\xi) = \pi q_j \text{ et } 0 < \Re(\xi) < h_j\}. \quad (10)$$

La figure 1 donne un exemple de peigne avec deux coupures horizontales.

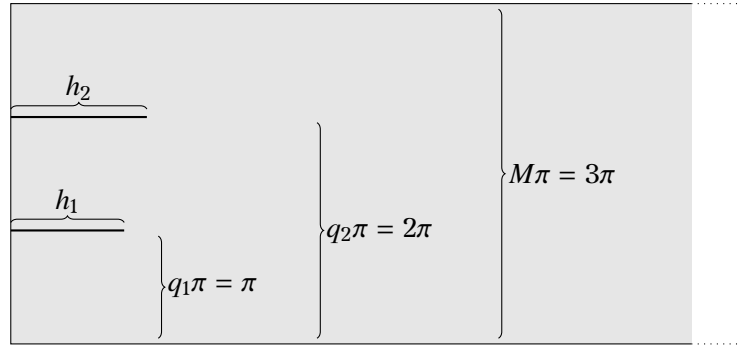


FIGURE 1 – Le peigne $\Pi_M(1, 2; h_1, h_2)$ avec $M = 3$.

Je peux maintenant donner la description des surfaces plates associées aux différentielles canoniques sur des courbes hyperelliptiques qui possèdent une solution à Pell-Abel.

Proposition 2.8. Soit η une différentielle canonique de degré r sur une courbe hyperelliptique totalement réelle C_D avec $2\eta_j = \pm \frac{2ir_j\pi}{r}$ ses périodes imaginaires et $2\lambda_\ell$ ses périodes plates. La surface plate associée à $r\eta$ est obtenue de la façon suivante.

1. On se donne le peigne $\Pi = \Pi_r(q_1, \dots, q_g; r\lambda_1, \dots, r\lambda_g)$, avec $q_i = \sum_{j=1}^i r_{j-1}$.
2. On fait une réflexion de Π le long de \mathbb{R} puis une rotation centrale au point $(0, 0)$.
3. On identifie par translation verticale les droites du bord du domaine ainsi créé.
4. Pour chaque segment obtenu par les images des dents du peigne, on identifie par translation la partie supérieure du segment avec la partie inférieure du segment d'ordonné opposée.

Notons que le lemme 2.11 ci-dessous donne la réciproque de cette proposition. Une surface plate obtenue de cette façon est représentée sur la figure 2.

Démonstration. La surface de Riemann C_D est obtenue en collant deux plans le long des intervalles E_j (voir par exemple la figure 5). Considérons la restriction de la différentielle canonique η au demi-plan supérieur \mathbb{H}^- de \mathbb{C} dont le point à l'infini correspond à ∞_- . Je montrerai que l'image de ce demi-plan par intégration de la différentielle est le peigne Π . En supposant ce résultat, la fin de la preuve est comme suit. Comme η est une différentielle réelle, l'image par intégration au demi plan inférieur bordant \mathbb{H}^- est donnée par la réflexion Π le long de l'une des demi-droites de Π . De plus, η est anti-invariante par l'involution hyperelliptique. Donc, l'image de l'autre plan par intégration de η est la rotation d'angle π de l'image du premier plan. Les identifications des bords de ces quatre peignes sont induits par les identification des demi-plans pour former la courbe C_D .

Il reste à montrer que l'image de \mathbb{H}^- par l'intégration de η est le peigne Π . Soit $t > 0$, considérons les courbes γ_t définies par la concaténation du segment d'ordonnée $1/t$ et d'abscisses comprises entre $-t$ et t avec le demi-cercle supérieur de centre i/t et de rayon t . Comme la restriction de η au domaine bordé par γ_t est holomorphe, l'intégrale de η sur γ_t est nulle. Par la symétrie de η et le fait qu'elle possède un pôle de résidu 1 à l'infini, l'intégral de $r\eta$ au demi-cercle est égal à $r\pi$. De plus, la limite de l'intégrale sur le segment est égale à l'intégrale de η sur \mathbb{R} . Comme la restriction de la différentielle η aux intervalles $] -\infty, a_0]$ et $]b_g, \infty]$ est réelle, l'image de ces demi-droites sont des demi-droites horizontales. L'image des intervalles $[b_i, a_{i+1}]$ par l'intégration de $r\eta$ est donnée de la façon suivante. L'image du segment $[b_i, c_{i+1}]$ est horizontale, vers la droite et de longueur $r\lambda_i$. L'image du segment $[c_{i+1}, a_{i+1}]$ est horizontale, vers la gauche et de longueur $r\lambda_i$. Donc, par la proposition 2.6, l'intégrale de $r\eta$ sur les intervalles E_i sont des segments verticaux de hauteur πr_i . L'image de \mathbb{R} par l'intégration de la restriction de η est donc le bord du peigne Π . Comme η ne s'annule pas sur \mathbb{H}^- , son image par intégration est le peigne Π . C.Q.F.D.

Les surfaces de translation de la proposition 2.8 peuvent s'obtenir par une construction différente. La remarque suivante décrit cette construction.

Remarque 2.9. Pour obtenir la surface de translation de la proposition 2.8 on commence par prendre un cylindre horizontal infini de hauteur $2r\pi$ et on considère un point a_0 sur celui-ci. On fait $2g$ coupures horizontales de la façon suivante. Pour tout $i = 1, \dots, g$ la coupure c_i^+ , resp. c_i^- , est de longueur $2r\lambda_i$, centrée sur le point à une distance $\sum_{j=1}^i r_j\pi$ au dessus, resp. en dessous, de a_0 . On obtient alors deux composantes de bord pour chaque coupure, que j'appelle lèvres supérieures et inférieures respectivement. On identifie alors par translation (verticale) la lèvre inférieure de c_i^+ avec la lèvre supérieure de c_i^- . On identifie de même la lèvre supérieure de c_i^- avec la lèvre inférieure de c_i^+ .

Sur une surface de translation de la proposition 2.8, les (préimages dans la surface de Riemann hyperelliptique des) points a_i et b_j sont donnés de la façon suivante. Le point b_i pour $i < g$ correspond au milieu du segment obtenu en identifiant la lèvre inférieure de c_{i+1}^+ avec la lèvre supérieure de c_{i+1}^- . Le point b_g est le point qui se trouve au dessus de a_0 à distance r . Le point a_i pour $i > 0$ correspond au milieu du segment obtenu en identifiant la lèvre supérieure de c_i^+ avec la lèvre inférieure de c_i^- . Enfin, les zéros z_i et \bar{z}_i de la différentielle correspondent respectivement aux sommets de droite et de gauche des segments c_i^\pm .

Exemple 2.10. La surface de translation associée au peigne $\Pi_3(1, 2; 3\lambda_1, 3\lambda_2)$ (après division par π) par la construction de la proposition 2.8 est représentée dans la figure 2. Elle est associée à une différentielle canonique de degré 3 multipliée par $\frac{3}{\pi}$.

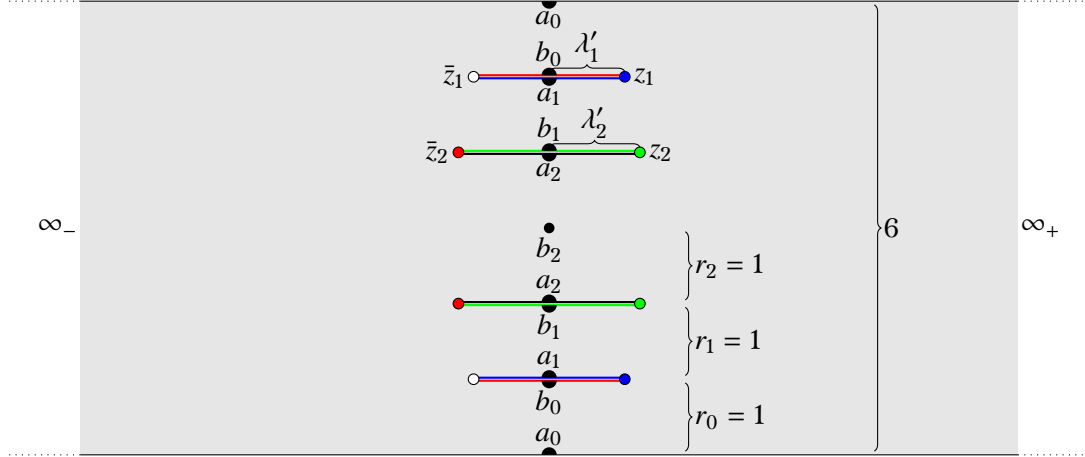


FIGURE 2 – Une différentielle canonique (multipliée par $\frac{r}{\pi}$) en genre 2 et de degré $r = 3$ dont les demi périodes plates sont $\lambda_i = \pi\lambda'_i/r$.

2.3 La preuve du théorème 1

Je vais commencer la preuve du théorème 1 par un lemme fondamental sur les différentielles canoniques. Ce résultat est similaire au théorème 2.1 de [Bog12] et au résultat énoncé dans la section 5.5 de [SY92].

Lemme 2.11. *Étant donné un entier strictement positif r , des entiers $\{r_j\}_{j \in \{0, \dots, g\}}$ strictement positifs de somme strictement inférieure à r et $\lambda_\ell > 0$. Notons $q_i = \sum_{j=0}^i r_j$ les sommes partielles des r_j . La différentielle (C, ω) associée à une surface de translation S obtenue par la construction de la proposition 2.8 à partir du peigne $\Pi_r(q_1, \dots, q_g; r\lambda_1, \dots, r\lambda_g)$ est une différentielle canonique de degré r sur une courbe hyperelliptique totalement réelle de genre g qui possède une solution de degré r à Pell-Abel.*

La preuve de ce résultat s'appuie sur le très bel argument d'Achieser exposé dans la section 5.4 de [SY92]. Elle repose sur la formule de Schwarz-Christoffel, qui est par exemple exposée dans [dSG10, IV.2.3], et qui s'énonce de la façon suivante. Étant donné un domaine polygonal simplement connexe P dont les sommets sont w_1, \dots, w_N et d'angles intérieurs $\psi_1\pi, \dots, \psi_N\pi$. Soit $\phi: \mathbb{H} \rightarrow P$ une uniformisante qui s'étend en un homéomorphisme sur chaque arête de P et qui envoie l'infini sur le point w_N . Il existe $N-1$ nombres réels $\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}$ tels que

$$\phi(z) = C \int_{z_0}^z \frac{dw}{(w - \alpha_1)^{1-\psi_1} \dots (w - \alpha_{N-1})^{1-\psi_{N-1}}}. \quad (11)$$

Ces rappels fait, je suis maintenant en mesure de donner la preuve du lemme 2.11.

Démonstration. On considère sur une surface plate S obtenue par la construction de la proposition 2.8 à partir du peigne $\Pi = \Pi_r(q_1, \dots, q_g; r\lambda_1, \dots, r\lambda_g)$ et la différentielle (C, ω) associée. On commence par montrer que C est une courbe hyperelliptique. Le quotient S' de S par la rotation de centre $(0, 0)$ et d'angle π donne une surface de translations et rotation d'angles $\{0, \pi\}$. Une telle surface plate est représentée dans la figure 3 en prenant le quotient de la différentielle de la figure 2. On peut associer à cette surface une

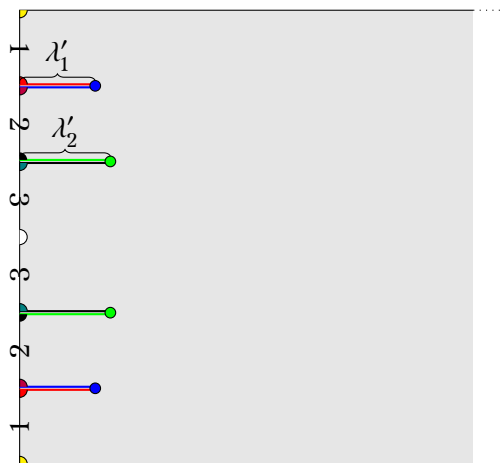


FIGURE 3 – La surface plate (multipliée par $\frac{r}{\pi}$) sur \mathbb{P}^1 obtenue par quotient de la différentielle de la figure 2. Les arêtes indexées par le même numéro sont identifiées deux à deux par une rotation d'angle π et une translation verticale.

différentielle quadratique (C', ξ) (voir section 3.1). On vérifie facilement que C' est \mathbb{P}^1 en calculant la caractéristique d'Euler. De plus, la rotation sur S possède $2g - 2$ points fixes, qui correspondent aux singularités d'angles π de S' . Donc la courbe C est hyperelliptique et l'involution hyperelliptique correspond à la rotation.

Comme la surface S' est symétrique et on peut considérer sa moitié inférieure. On retrouve le peigne Π . Soit ϕ le biholomorphisme entre Π et \mathbb{H} normalisé en imposant

$$\phi(a_0) = 0, \phi(b_g) = i\pi r \text{ et } \phi(\infty) = \infty.$$

Le biholomorphisme ϕ est donné par l'inverse de l'application de Schwarz-Christoffel :

$$\phi: \mathbb{H} \rightarrow \Pi : z \mapsto r \int_{a_0}^z \frac{(w - c_1) \cdots (w - c_g)}{(w - a_0)^{1/2} (w - b_0)^{1/2} \cdots (w - a_g)^{1/2} (w - b_g)^{1/2}} dw, \quad (12)$$

avec $a_i, b_j, c_k \in \mathbb{R}$. On en déduit que la différentielle ω est définie sur la courbe hyperelliptique totalement réelle C_D , où le polynôme D est donné par

$$D(w) = \prod_{i=0}^g (w - a_i)(w - b_i)$$

et que le polynôme canonique R introduit dans la définition 2.2 est

$$R(w) = (w - c_1) \cdots (w - c_g).$$

Maintenant, on définit sur la droite réelle la fonction

$$P(x) = \cos(i\phi(x)). \quad (13)$$

Notons que cette fonction est analytique et s'étend à \mathbb{C} en une fonction holomorphe par la même formule. De plus, pour tout $i \in \{0, \dots, g\}$ elle possède r_i zéros sur l'intervalle E_i et ne s'annule pas ailleurs. Comme ϕ est un homéomorphisme sur ces intervalles, les zéros de P sont simples. On en déduit que P est un polynôme de degré r .

Il reste à vérifier que P satisfait l'équation de Pell-Abel sur C_D . Il est clair que la fonction $S(x) = i \sin(i\phi(x))$ satisfaisait à l'équation $P^2 - S^2 = 1$. On en déduit que S est un polynôme. Il reste à vérifier que S est divisible par D . Cela est clairement impliqué par le fait que l'ensemble des racines de S contient les points a_i et b_j . C.Q.F.D.

Avant de passer à la preuve du théorème 1 je souhaite faire quelques commentaires sur le résultat que l'on vient de prouver.

L'un des points fondamentaux de la preuve est d'écrire P comme le cosinus d'une intégrale hyperelliptique. Il existe d'autres moyens d'obtenir ce résultat. L'un des plus élégant est donné via les équations différentielles ordinaires. On pourra se reporter à la section 2 de [Bog10] pour obtenir cette version.

La figure 4 donne le polynôme associé à la différentielle de la figure 2. Le polynôme R

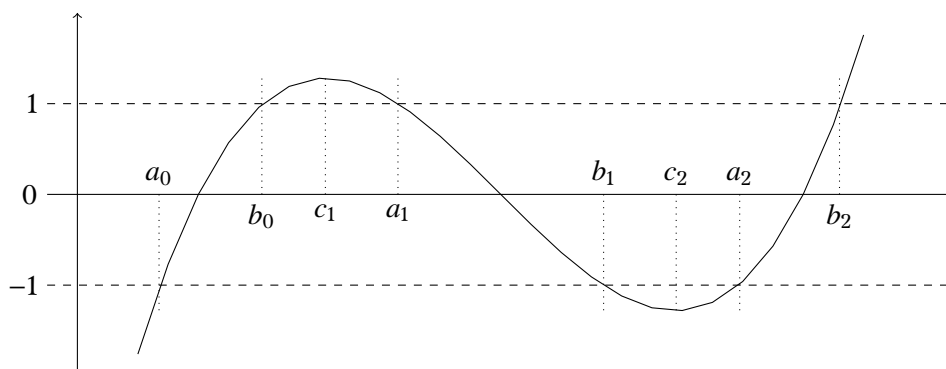


FIGURE 4 – Le polynôme P associé à la différentielle canonique de la figure 2.

est égal à $(x - c_1)(x - c_2)$. De plus, c_i est l'image de z_i et \bar{z}_i par l'involution hyperelliptique. La demi période plate λ_i est simplement égale à l'intégrale de la forme $R/\sqrt{D}dx$ du point b_{i-1} à c_i . Le fait que chaque intervalle E_i possède un unique zéro de P est équivalent au fait que $r_i = 1$.

On peut se demander si, étant donnée une différentielle canonique, on peut trouver de manière effective l'équation de la courbe hyperelliptique C_D et le polynôme P . Ce problème est très difficile en général, mais des résultats intéressants ont été obtenus par [Ach28] et développés dans [Bog99] via les fonctions automorphes.

Je donne maintenant la preuve du théorème 1. Rappelons que celui-ci donne l'existence d'une solution primitive de degré r de l'équation de Pell-Abel sur une courbe hyperelliptique totalement réelle de genre g si et seulement si $r \geq g + 1$.

Démonstration. Au vu de la remarque 2.7, il suffit de montrer qu'il existe des solutions de degré r pour tout $r \geq g + 1$. Par le lemme 2.11, il suffit de montrer qu'il existe une différentielle canonique de degré r sur une surface de genre g qui n'est pas de degré r' pour un $r' < r$. Pour cela il suffit de considérer les entiers $r_i = 1$ pour $i \in \{0, \dots, g - 1\}$ et $r_g = r - g$. On considère alors pour $q_i = \sum_{j=1}^i r_{j-1}$ le peigne

$$\Pi_r(q_1, \dots, g_g; r\lambda_1, \dots, r\lambda_g)$$

avec $\lambda_i > 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, g\}$. Par le lemme 2.11, la différentielle obtenue par la construction de la proposition 2.8 est canonique de degré r sur une surface totalement réelle de genre g . Le choix des r_i impliquent qu'elle est primitive. Donc la solution de l'équation de Pell-Abel associée à cette différentielle est primitive. C.Q.F.D.

On peut de plus déduire une description de l'ensemble des composantes connexes des lieux formés par les couples donnés par les différentielles canonique primitive de degré r sur les courbes hyperelliptiques totalement réelles de genre g sur lesquelles l'équation de Pell-Abel est résoluble. Un résultat similaire est donné par l'équation (19) de [Bog99].

Corollaire 2.12. *L'espace des modules des différentielles canonique primitive de degré r sur les courbes hyperelliptiques totalement réelles de genre g satisfaisant à l'équation de Pell-Abel est une union de cônes ouverts $(\mathbb{R}_+^*)^{g-1}$, où cette union est prise sur toute les partitions (r_0, \dots, r_g) de r à $g + 1$ éléments tels que $\text{pgcd}(r_0, \dots, r_g) = 1$.*

Pour terminer cette section, je donne une remarque sur le corps de définition des courbes considérées.

Remarque 2.13. On peut se demander si il existe des courbes algébriques définies sur \mathbb{Q} ou un autre sous-corps de \mathbb{R} avec des points de r -torsions (voir entre beaucoup d'autres références [Lep97]). Afin d'étudier ce problème, [Pak98] associe un graphe aux courbes hyperelliptiques avec un point de r -torsion. Ce graphe est la préimage du segment $[-1, 1]$ par le polynôme P . Dans le cas des courbes hyperelliptiques totalement réelles, on obtient une union de $g + 1$ segments disjoints. Chacun de ces segments contient $r_i - 1$ sommets en son intérieur. Donc ce cas ne semble pas être le cas le plus adéquat pour étudier ce problème.

3 Les k -différentielles

Dans cette section, je donne tout d'abord quelques rappels sur les k -différentielles méromorphes et la structure plate qui leur est associée pour tout $k \geq 1$. Beaucoup plus d'informations peut se trouver dans [MT02, Str84] dans le cas des différentielles abéliennes et quadratiques et [BCG⁺19] dans celui des k -différentielles pour $k \geq 3$. La preuve du théorème 2 est donnée dans la section 3.2. Enfin le théorème 2 est généralisé au cas des k -différentielles dont le diviseur est supporté sur des points conjugués par l'involution hyperelliptique dans la section 3.3.

3.1 Rappels sur les k -différentielles

Une *différentielle abélienne* est une paire (C, ω) où C est une surface de Riemann et ω est une section méromorphe non nulle du fibré cotangent K de C . Si la section est méromorphe et ne possède que des pôles simples alors on dit qu'elle est de *troisième espèce*. Dans le cas où ω est holomorphe, on dit quelle est de *première espèce*.

La différentielle ω induit par intégration une structure de translation et une métrique plate sur la surface C privée des zéros et des pôles de ω . Cette métrique s'étend aux zéros de ω en une métrique singulière. Plus précisément, un zéro d'ordre m de ω correspond à une singularité conique d'angle $(m+1)2\pi$ de la métrique plate. De plus, un pôle simple de résidu r correspond à un cylindre infini de circonférence $2i\pi r$. Réciproquement, on peut associer à une surface de translation satisfaisant certaines conditions une différentielle méromorphe. On peut par exemple vérifier que la surface de translation représentée dans la figure 2 correspond à une différentielle abélienne possédant les propriétés énoncées.

Le théorème de Riemann-Roch implique qu'une différentielle ω possède $2g - 2$ zéros comptés avec multiplicité. Étant donnée une partition $\mu = (m_1, \dots, m_n)$ de $2g - 2$, on définit donc l'espace des modules des différentielles abéliennes dont les ordres des zéros sont égaux à m_1, \dots, m_n . Cet espace des modules se nomme *strate* de différentielles abéliennes de type μ et se note $\Omega\mathcal{M}_g(\mu)$. Ces strates sont des variétés orbifoldes complexes de dimension $2g - 1 + n$.

La discussion précédente peut être étendue au cas des k -différentielles pour tout $k \geq 2$. Une k -différentielle ξ est une section non nulle du produit tensoriel k ème du fibré canonique d'une surface de Riemann. Une k -différentielle est dite primitive si elle n'est pas la puissance d'une k' -différentielle avec $k' < k$.

On obtient une surface plate en intégrant la racine k ème d'une k -différentielle ξ . Cette surface est une surface dont les changements de cartes, dans les complémentaires des singularités de ξ , sont donnés par une composition de translations et de rotations d'angles multiples de $2\pi/k$. Par exemple dans le cas d'une différentielle quadratique, les changements de cartes sont des compositions de translations et de rotations d'angles π . De manière équivalente, on peut obtenir une k -différentielle en identifiant les arêtes d'un polygone par des translations et des rotations d'angles multiples de $2\pi/k$. Une différentielle quadratique est représentée de cette façon sur la figure 3.

De plus, étant donnée une partition $\mu = (m_1, \dots, m_n)$ de $k(2g - 2)$, on considère les espaces des modules des k -différentielles dont les ordres des zéros et éventuellement des pôles sont égaux à m_1, \dots, m_n . Cet espace des modules se nomme *strate* de k -différentielles de type μ et se note $\Omega^k\mathcal{M}_g(\mu)$. Ces strates sont des variétés orbifoldes telles que les composantes paramétrant les k -différentielles primitives sont toutes de dimension complexe égale à $2g - 2 + n$.

3.2 Preuve du théorème 2

Je donne maintenant la preuve du théorème 2. Rappelons que celui-ci donne l'existence d'une k -différentielle primitive avec un unique zéro sur une surface de Riemann

hyperelliptique totalement réelle sauf dans le cas particulier des différentielles quadratiques sur les courbes de genre 2.

Par le théorème 1, pour tout $r \geq g + 1$, il existe une courbe hyperelliptique totalement réelle C_D et des points (z, z') conjugués par l'involution hyperelliptique tels que

$$rz - rz' \sim \mathcal{O}, \quad (14)$$

où \mathcal{O} est le fibré trivial de C_D . De plus, cette équation n'est satisfaite sur C_D pour aucun $m \in \{1, \dots, r-1\}$. Comme ces points sont conjugués par l'involution hyperelliptique, on a l'égalité classique

$$(g-1)z + (g-1)z' \sim K, \quad (15)$$

où K est le fibré canonique de C_D . Prenons maintenant $r = k(g-1)$, on obtient des équations (14) et (15) que

$$2rz = kK. \quad (16)$$

Donc z est l'unique zéro d'une k -différentielle ξ . Le fait que r est minimal parmi les entiers satisfaisant cette équation implique que ξ est une k -différentielle primitive. Comme $r \geq g + 1$, on a l'existence d'une k -différentielle primitive qui possède un unique zéro pour tout $k \geq \frac{g+1}{g-1}$. L'unique restriction induite par cette inégalité est dans le cas $g = k = 2$. Il est bien connu qu'il n'existe pas de différentielles quadratiques primitives en genre 2 avec un unique zéro. Cela conclut la preuve du théorème 2.

Pour terminer cette section, je souhaite noter les points suivants.

- Remarque 3.1.*
1. Le lieu hyperelliptique est de dimension $2g - 1$ et la projection de $\Omega^k \mathcal{M}_g(k(2g-2))$ de dimension $2g - 2$ dans l'espace des modules \mathcal{M}_g . Il n'était donc pas a priori évident que ces deux lieux s'intersectent.
 2. En genre 2 on peut donner une représentation plate de k -différentielles primitives de la strate $\Omega^k \mathcal{M}_2(2k)$ (voir par exemple [Gen]). Je ne connais aucun moyen de savoir si cette représentation plate correspond à une k -différentielle sur une surface totalement réelle. De plus, dans le cas des courbes de genre $g \geq 3$ je ne connais aucun moyen de déterminer si une représentation plate d'une telle k -différentielles est sur une courbe hyperelliptique (réelle ou même complexe).
 3. Il serait intéressant de pouvoir donner une relation explicite entre la représentation plate d'une différentielle canonique et de la k -différentielle associée.

3.3 k -différentielles dont le diviseur est de support est conjugué

Dans cette section, je vais généraliser le théorème 2 au cas des k -différentielles dont le diviseur est supporté sur des points $(z, \iota(z))$, où ι est l'involution hyperelliptique. Le résultat suivant donne une description de cette situation.

Proposition 3.2. *Soient C une courbe hyperelliptique de genre g et $k \geq 2$. S'il existe une k -différentielle primitive ξ sur C telle que $(\xi) = nz + n'\iota(z)$ avec $n > n' \geq 0$, alors l'équation de Pell-Abel est résoluble sur C et $2k(g-1) \geq n \geq (k+1)g - (k-1)$.*

Réciproquement, si $2k(g-1) \geq n \geq (k+1)g - (k-1)$ alors il existe une courbe hyperelliptique totalement réelle C et une k -différentielle primitive ξ sur C dont le diviseur est de la forme $nz + n'\iota(z)$.

Notons que l'on retrouve le théorème 2 en posant $n = 2k(g-1)$. De plus, le cas $n = n'$ n'est pas considéré car il correspond à la puissance k ème d'une différentielle abélienne dont le diviseur est $(g-1)z + (g-1)\iota(z)$. La fin de cette section est constituée de la preuve de la proposition 3.2.

Soit C une courbe hyperelliptique de genre g telle qu'il existe une k -différentielle holomorphe ξ dont le diviseur est $(\xi) = nz + n'\iota(z)$ avec $n > n'$. On supposera que C est donnée par l'équation $y^2 = \prod_{i=0}^{2g+1} (x - x_i)$ et que les points z et $\iota(z)$ sont les points à l'infini ∞_{\pm} de C . Une base des k -différentielles holomorphes sur C est donnée par

$$x^i \frac{dx^k}{y^k}, \text{ pour } i \in \{0, \dots, kg - k\} \text{ et } x^i \frac{dx^k}{y^{k-1}}, \text{ pour } i \in \{0, \dots, kg - k - g - 1\}.$$

Donc la k -différentielle ξ sur C est de la forme

$$\xi = \left(\sum_{i=0}^{kg-k} (\alpha_j x^j + \beta_j x^j y) \right) \frac{dx^k}{y^k},$$

où $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{C}$ et $\beta_j = 0$ pour $j \geq kg - k - g$. De plus, le diviseur de la fonction y sur la surface de Riemann C est

$$(y) = \sum_{i=0}^{2g+1} (x_i, 0) - (g+1)(\infty_- + \infty_+)$$

et celui de la forme dx est

$$(dx) = \sum_{i=0}^{2g+1} (x_i, 0) - 2(\infty_- + \infty_+).$$

On en déduit que le support du diviseur de dx^k/y^k est $k(g-1)(\infty_+ + \infty_-)$. Donc pour que le support du diviseur de ξ soit contenu dans ∞_{\pm} , il faut que la fonction $f = \sum (\alpha_j x^j + \beta_j x^j y)$ soit un élément inversible de l'algèbre affine de C . Comme la discussion de la section 2.1, s'étend sans difficultés aux courbes hyperelliptiques générales, on déduit de (2) que f est une solution de l'équation de Pell-Abel (après normalisation). Supposons que f est une solution primitive de degré r de Pell-Abel. alors le diviseur de ξ est

$$(k(g-1) + r)\infty_+ + (k(g-1) - r)\infty_- \sim kK. \quad (17)$$

On a alors $n = k(g-1) + r$ et le théorème 1 donne $r \geq g+1$, ce qui implique que $n \geq (k+1)g - (k-1)$. L'inégalité $2k(g-1) \geq n$ est une conséquence directe du fait que l'on ne considère que des k -différentielles holomorphes.

La réciproque est une conséquence directe du théorème 1 et des calculs que l'on vient de réaliser.

4 Les points de torsion

Le but de cette section est de démontrer le théorème 3 qui donne l'existence de points de n -torsion modulo un point de Weierstraß sur certaines courbes hyperelliptique de genre g pour $n \geq 2g + 1$. Quelques rappels sur les points de torsion sont donnés dans la section 4.1 et la preuve du théorème dans la section 4.2.

4.1 Rappels sur les points de torsion

Soit C une courbe hyperelliptique de genre $g \geq 2$. On considère un point de Weierstraß W sur C et l'application d'Abel-Jacobi $\varphi_W: C \rightarrow J_C$ qui envoie W sur l'origine. Un *point de n -torsion modulo W* est un point $P \in C$ tel que $\varphi_W(P)$ est un point de n -torsion de la jacobienne, mais pas de n' -torsion pour tout $0 < n' < n$. Notons que les points de 2-torsion modulo W sont exactement les autres points de Weierstraß de C .

On peut étendre ces considérations au cas des surfaces de Riemann de genre 1. Dans ce cas, on fixe un point arbitraire W sur la surface C de genre 1. Un *point de N -torsion modulo W* est un point $P \in C$ tel que P est un point de N -torsion sur la courbe elliptique (C, W) mais pas de n' -torsion pour tout $0 < n' < n$. J'appelle *points de Weierstraß* les points de 2-torsion de (C, W) .

Je souhaite insister sur le fait que l'ordre n d'un point P dépend du choix du point de Weierstraß. En effet, prenons une surface de Riemann C de genre 1 donnée par le quotient de \mathbb{C} par le réseau $\mathbb{Z}v_1 \oplus \mathbb{Z}v_2$. Considérons les points W_0 et W_1 de C donnés respectivement par l'image de l'origine et de $\frac{1}{2}v_1$. Le point P_1 donné par l'image de $\frac{1}{6}v_1$ est de 6-torsion modulo W_0 et de 3-torsion modulo W_1 .

Pour terminer ces rappels, je discute l'ordre de torsion du point $z = \infty_+$ sur une courbe C de genre $g \geq 2$ qui possède une solution primitive d'ordre r à l'équation de Pell-Abel. Étant donné un point de Weierstraß W de C . En notant z' le conjugué de z , on déduit de $z + z' \sim 2W$ que $2rz \sim 2rW$. Cela implique que le point z est un point ℓ -torsion modulo W avec $\ell | 2r$. Le fait que la solution est primitive de degré r et que z n'est pas de Weierstraß implique que soit $\ell = 2r$ ou $\ell = r$.

4.2 Preuve du théorème 3

Je commence par montrer que pour $3 \leq r \leq 2g$ il n'existe pas de points de r -torsion sur les courbes hyperelliptiques. Ce résultat est donné dans [Zar19, théorème 2.8] et [DR19, lemme 3.139]. Je donne ici une preuve un peu différente, mais essentiellement équivalente à celles proposées par ces auteurs.

Supposons qu'il existe un tel point P de r -torsion sur une courbe hyperelliptique C . Par définition il existe un point de Weierstraß W tel que $r(P - W) \sim \mathcal{O}$, où \mathcal{O} est le fibré trivial de C . De plus, on a l'égalité classique $(2g - 2)W \sim K$ avec K le fibré canonique de C . Donc l'existence de ce point de r -torsion est équivalente à l'existence d'une solution à l'équation

$$rP + (2g - 2 - r)W \sim K.$$

Si $r \leq 2g - 2$, il n'existe pas de solution à cette équation car les diviseurs des différentielles sur les courbes hyperelliptiques sont invariants par l'involution hyperelliptique ι . Dans le cas $r = 2g - 1$, cela est une conséquence du théorème des résidus. En effet, il n'existe pas de différentielles avec un unique pôle simple sur une surface de Riemann compacte. Enfin, dans le cas $r = 2g$, on utilise l'égalité classique $-2W + P + \iota(P) \sim O$ pour obtenir l'équation équivalente $(2g + 1)P - \iota(P) \sim K$ qui n'a pas de solutions pour la même raison que dans le cas précédent.

On montre maintenant que si $r \geq 2g + 1$, alors il existe une courbe hyperelliptique totalement réelle de genre g avec un point de r -torsion modulo un point de Weierstraß. Fixons une différentielle canonique η de degré r sur une courbe hyperelliptique totalement réelle C_D de genre g .

On commence par se donner la base symplectique $(\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g)$ de $H_1(C_D, \mathbb{Z})$ présentée dans la figure 5. Les cycles α_i encerclent l'union des intervalles $\cup_{j \leq i-1} [a_j, b_j]$

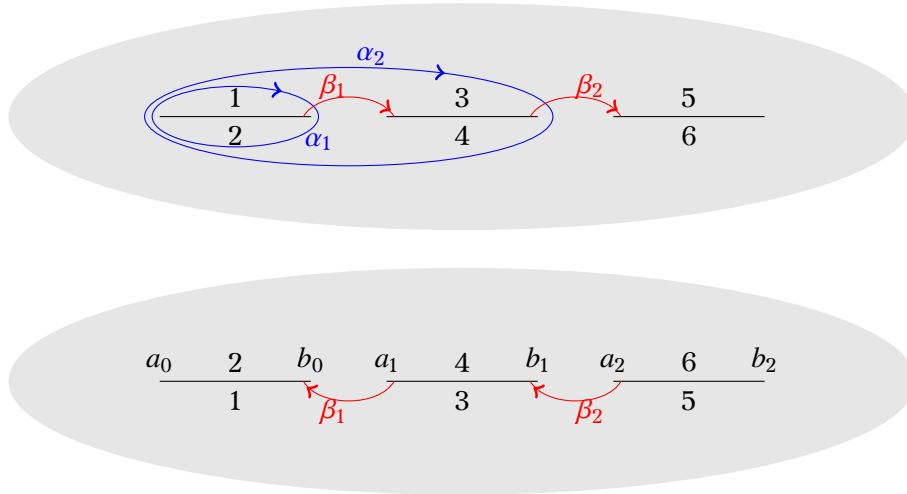


FIGURE 5 – Une base symplectique de l'homologie sur une courbe hyperelliptique totalement réelle de genre 2.

dans la copie du plan telle que $\int_{\alpha_j} \eta$ est un nombre imaginaire strictement positif. Les cycles β_i commencent au point b_{i-1} , suivent l'intervalle $[b_{i-1}, a_i]$ dans la même copie du plan puis $[a_i, b_{i-1}]$ dans l'autre copie du plan.

On se donne une base $\{\omega_1, \dots, \omega_g\}$ de l'espace vectoriel des différentielles abéliennes holomorphes sur C_D . Notons $A_i^j = \int_{\alpha_j} \omega_i$ et $B_i^j = \int_{\beta_j} \omega_i$ les périodes des ω_i relativement à la base symplectique de la figure 5. Rappelons que η_k est égal à $\int_{a_k}^{b_k} \eta$ et que $r_k = \pm \frac{ir\eta_k}{\pi}$. Il suit immédiatement des équations (3) et (4) et du choix des α_i que

$$\int_{\alpha_j} \eta = 2 \sum_{k \leq j} \eta_k = \frac{2\pi}{ir} \sum_{k \leq j} r_k \text{ et } \int_{\beta_j} \eta = 0.$$

On note $q_j = \sum_{k \leq j} r_k$ les sommes partielles de r_k . La loi de réciprocité pour les différentielles de première et troisième espèce (voir par exemple [GH94, p. 230]) implique pour

tout $i \in \{1, \dots, g\}$ l'équation

$$\sum_{j=1}^g B_i^j \sum_{k \leq j} 2\eta_k = 2i\pi \int_{\infty_-}^{\infty_+} \omega_i. \quad (18)$$

Dans l'équation précédente, le chemin d'intégration entre les points ∞_- et ∞_+ n'intersecte aucun des lacets de la base symplectique. Le fait que la courbe hyperelliptique soit totalement réelle implique que

$$\int_{\infty_-}^{\infty_+} \omega_i = 2 \int_{b_g}^{\infty_+} \omega_i + \int_{a_0}^{b_g} \omega_i.$$

De plus, $\int_{a_0}^{b_g} \omega_i$ est égal à la moitié de l'intégral de ω_i le long d'un chemin α_g qui encercle l'union des $g+1$ segments $[a_i, b_i]$. Comme ω_i est holomorphe et α_g est homotopiquement nul, cela implique que $\int_{a_0}^{b_g} \omega_i = 0$. Finalement, on obtient l'égalité

$$\int_{b_g}^{\infty_+} \omega_i = - \sum_{j=1}^g \frac{q_j}{2r} B_i^j. \quad (19)$$

De cette équation il suit que ∞_+ est un point de r torsion modulo b_g si et seulement si les entiers q_j sont pairs pour tout $j \leq g-1$. Si cette condition n'est pas satisfaite, alors on obtient un point de $2r$ -torsion. Finalement, pour obtenir un point de r -torsion, il suffit de considérer une différentielle canonique telle $r_0 = \dots = r_{g-1} = 2$ et $r_g = r - 2g + 2$. Une telle différentielle existe car par hypothèse $r \geq 2g - 1$ et elle est canonique de degré r par le lemme 2.11.

Références

- [Abe26] Niels Abel. Ueber die Integration der Differential-Formel $\frac{\rho dx}{\sqrt{R}}$, wenn R und ρ ganze Functionen sind. *J. Reine Angew. Math.*, 1 :185–221, 1826. traduction française, Œuvres complètes, tome 1, p. 104–144, 1881.
- [Ach28] Naum Achyesser. Über einige Funktionen, die in gegebenen Intervallen am wenigsten von Null abweichen. *Bull. Soc. Phys.-Math. Kazan, III. Ser.*, 3(2) :1–69, 1928.
- [BCG⁺19] Matt Bainbridge, Dawei Chen, Quentin Gendron, Samuel Grushevsky, and Martin Möller. Strata of k -differentials. *Algebr. Geom.*, 6(2) :196–233, 2019.
- [BG02] John Boxall and David Grant. Theta functions and singular torsion on elliptic curves. In *Number theory for the millennium I. Proceedings of the millennial conference on number theory*, pages 111–126. Peters, 2002.
- [Bog99] Andrei Bogatyrëv. Effective computation of Chebyshev polynomials for several intervals. *Sb. Math.*, 190(11) :15–50, 1999. traduction anglaise, Mat. Sb. 190, No. 11, 1571–1605, 1999.

- [Bog10] Andrei Bogatyřev. Chebyshev representation for rational functions. *Sb. Math.*, 201(1) :1579–1598, 2010.
- [Bog12] Andrei Bogatyřev. *Extremal polynomials and Riemann surfaces*. Springer, 2012.
- [BZ13] Vladimir Burskii and Alexei Zhedanov. On Dirichlet, Poncelet and Abel problems. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 12(4) :1587–1633, 2013.
- [BZ20] Boris Bekker and Yuri Zarhin. Torsion points of order $2g + 1$ on odd degree hyperelliptic curves of genus g . *Trans. Am. Math. Soc.*, 373(11) :8059–8094, 2020.
- [DR11] Vladimir Dragović and Milena Radnović. *Poncelet porisms and beyond. Integrable billiards, hyperelliptic Jacobians and pencils of quadrics*. Birkhäuser, 2011.
- [DR19] Vladimir Dragović and Milena Radnović. Periodic ellipsoidal billiard trajectories and extremal polynomials. *Communications in Mathematical Physics*, 372 :183–211, 2019.
- [dSG10] Henri Paul de Saint-Gervais. *Uniformisation des surfaces de Riemann. Retour sur un théorème centenaire*. Lyon : ENS Éditions, 2010.
- [Gen] Quentin Gendron. Diferenciales, superficies planas y puntos de Weierstrass. En préparation.
- [GH94] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., 1994. Reprint of the 1978 original.
- [GT17] Quentin Gendron and Guillaume Tahar. Différentielles à singularités prescrites. *ArXiv e-prints*, 2017.
- [Lep97] Franck Leprévost. Sur certains sous-groupes de torsion de jacobiniennes de courbes hyperelliptiques de genre $g \geq 1$. *Manuscr. Math.*, 92(1) :47–63, 1997.
- [McM06] Curtis McMullen. Teichmüller curves in genus two : Torsion divisors and ratios of sines. *Invent. Math.*, 165(3) :651–672, 2006.
- [MT02] Howard Masur and Serge Tabachnikov. Rational billiards and flat structures. In *Handbook of dynamical systems. Volume 1A*, pages 1015–1089. North-Holland, 2002.
- [Pak98] Fedor Pakovitch. Combinatoire des arbres planaires et arithmétique des courbes hyperelliptiques. *Ann. Inst. Fourier*, 48(2) :323–351, 1998.
- [Ser17] Jean-Pierre Serre. Distribution asymptotique des valeurs propres des endomorphismes de Frobenius (d’après Abel, Chebyshev, Robinson,...). In *Séminaire Bourbaki 2017/18 (70e année)*. Soc. Math. France, 2017.
- [Str84] Kurt Strebel. *Quadratic differentials*, volume 5 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge*. Springer, 1984.
- [SY92] Mikhail Sodin and Peter Yuditskij. Functions least deviating from zero on closed subsets of the real axis. *Algebra Anal.*, 4(2) :1–61, 1992. traduction anglaise, *St. Petersburg Math. J.*, 4,2, p. 201–249, 1993.

- [Tch54] Pafnutiĭ Tchebychev. Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes. *Mém. Acad. Sci. Pétersb*, 7 :539–568, 08 1854.
- [Zar19] Yuriĭ Zarhin. Division by 2 on odd-degree hyperelliptic curves and their Jacobians. *Izv. Math.*, 83(3) :501–520, 2019.

Quentin Gendron
Centro de Investigación en Matemáticas,
Guanajuato, Gto.,
AP 402, CP 36000,
México
courriel : quentin.gendron@cimat.mx