

Équation de Pell-Abel et applications

Quentin Gendron

20 octobre 2020

Abstract

In this paper, we show that there are solutions of every degree r of the equation of Pell-Abel on some real hyperelliptic curve of genus g if and only if $r > g$. This result, which is known to the experts, has consequences, which seem to be unknown to the experts. First, we deduce the existence of a primitive k -differential on an hyperelliptic curve of genus g with a unique zero of order $k(2g - 2)$ for every $(k, g) \neq (2, 2)$. Moreover, we show that there exists a non Weierstrass point of order n modulo a Weierstrass point on a hyperelliptic curve of genus g if and only if $n > 2g$.

Résumé

Dans cet article, je montrerai que l'équation de Pell-Abel possède une solution de degré r sur une courbe hyperelliptique de genre g si et seulement si $r > g$. Ce résultat est connu des experts, mais il possède des conséquences intéressantes, qui ne semblent pas connues. Tout d'abord, cela implique l'existence d'une k -différentielle primitive avec un unique zéro d'ordre $k(2g - 2)$ sur une courbe hyperelliptique de genre g pour tout $(k, g) \neq (2, 2)$. De plus, cela implique qu'il existe des courbes hyperelliptiques avec un point qui n'est pas de Weierstrass et qui est d'ordre n modulo un point de Weierstrass si et seulement si $n > 2g$.

Table des matières

1	Introduction	2
2	Équation de Pell-Abel et différentielle canonique	4
3	Les k-différentielles	14
4	Les points de torsion	17
	Références	20

1 Introduction

Soit D un polynôme de degré pair $2g + 2$ dont les zéros sont simples. On lui associe une courbe hyperelliptique C_D de genre g par l'équation $y^2 = D(x)$. L'équation de Pell-Abel sur C_D est l'équation polynomiale

$$P^2 - DQ^2 = c, \tag{1}$$

avec $c \in \mathbb{C}^*$. Une solution (P, Q) de cette équation est dite de *degré* r si le degré de P est égal à r . De plus, cette solution est *primitive* si le degré de P est minimal parmi les solutions distinctes de $(\pm \sqrt{c}, 0)$.

Cette célèbre équation a été étudiée en profondeur dans différents contextes depuis son introduction par Abel [Abe26]. Dans son article, Abel donne des conditions nécessaires et suffisantes sur le polynôme D pour que l'équation de Pell-Abel ait une solution. Cette équation a été par la suite réétudiée par Tchebychev [Tch54] en lien avec les polynômes qui s'écartent le moins possible de l'axe des abscisses sur une union d'intervalles. Par la suite, cette étude a été approfondie par Achieser, Markoff, Zolotareff et beaucoup d'autres. On pourra par exemple consulter les textes [Bog12, Ser18, SY92] et les références de ces textes pour plus de détails. Sans prétendre à l'exhaustivité, il est intéressant de noter que cette équation est aussi apparue en lien avec la physique mathématique [BZ13], les systèmes dynamiques [McM06], les billards dans les ellipsoïdes [DR11] ou les points d'ordres finis sur les courbes hyperelliptiques définies sur le corps des rationnels [Pak98].

Solutions de Pell-Abel. Dans cet article je me propose tout d'abord d'étudier les degrés des solutions de l'équation de Pell-Abel sur certaines courbes hyperelliptiques. Une courbe hyperelliptique C_D est *totalelement réelle* si les racines de D sont contenues dans \mathbb{R} . Je vais en particulier montrer le résultat suivant.

Théorème 1. *Pour tout $g \geq 0$, il existe une courbe hyperelliptique totalelement réelle C_D de genre g telle que l'équation de Pell-Abel possède une solution primitive de degré r si et seulement si $r > g$.*

De fait, je montrerai que l'équation de Pell-Abel sur une courbe hyperelliptique quelconque n'a jamais de solutions pour $r \leq g$. Pour construire des solutions pour tout $r > g$, j'utiliserai la théorie des différentielles abéliennes sur les courbes algébriques complexes (ou surfaces de Riemann). En effet, on peut associer une différentielle canonique à chaque courbe hyperelliptique définie par un polynôme D comme ci-dessus. Je montrerai que cette différentielle est étroitement liée à l'équation de Pell-Abel, ce qui me permettra de montrer le résultat ci-dessus.

Ce résultat est sans aucun doute connu des spécialistes. Des versions plus ou moins explicites de celui-ci peuvent se trouver dans [SY92], [Bog12] et surtout [Bog99]. Toutefois, comme l'écrit Serre [Ser18, paragraphe 2.5] à propos de résultats similaires : "Il n'est pas facile de dire à qui ces théorèmes sont dus. L'une des difficultés est qu'ils sont rarement énoncés explicitement, et, du coup, ils ne sont pas démontrés en détails". Aussi je pense

qu'il est intéressant d'énoncer clairement ce résultat important et de le prouver de manière relativement élémentaire.

Je vais maintenant donner deux applications intéressantes de ce résultat que je n'ai pu trouver dans la littérature. Les sujets que je vais aborder reflètent mes goûts et il est probable que des applications similaires à d'autres problèmes sont possibles.

Les k -différentielles. Je voudrais tout d'abord utiliser le théorème 1 dans le domaine des k -différentielles sur les surfaces de Riemann. Soit $k \geq 1$, une k -différentielle est une section non nulle de la puissance tensoriel k ème du fibré canonique d'une surface de Riemann. Une k -différentielle est *primitive* si elle n'est pas la puissance d'une k' -différentielle avec $0 < k' < k$.

Un problème délicat est de savoir s'il existe des k -différentielles satisfaisant certaines propriétés. Dans cet direction, je montrerai le résultat suivant.

Théorème 2. *Soit $g \geq 2$ et $k \geq 1$, il existe une k -différentielle primitive avec un unique zéro d'ordre $k(2g-2)$ sur une courbe hyperelliptique totalement réelle de genre g si et seulement si $(g, k) \neq (2, 2)$.*

Notons que le théorème 1.4 de [GT17] donne l'existence de k -différentielles primitives avec un unique zéro sur des surfaces de Riemann de genre g , sauf dans le cas où $g = k = 2$. L'originalité du présent résultat est donc de donner l'existence de tels objets sur une courbe hyperelliptique. Le théorème 2 est une application directe du théorème 1 et de résultats élémentaires de géométrie algébrique.

De plus, ce théorème est un cas particulier d'un résultat plus général. On peut en effet se demander s'il existe des k -différentielles holomorphes primitives sur des courbes hyperelliptiques dont le diviseur est supporté sur des points conjugués par l'involution hyperelliptique. J'étudie ce problème dans la section 3.3. En particulier, la proposition 3.2 donne des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de telles k -différentielles.

Les points de torsion. La seconde application que je souhaite donner est au sujet des points de torsion sur les courbes hyperelliptiques. Étant donné une courbe hyperelliptique C et point de Weierstraß W de C , on considère l'application d'Abel-Jacobi $\varphi_W: C \rightarrow J_C$ qui envoie le point W sur l'origine de la jacobienne J_C de C . Un *point de n -torsion primitif* modulo W sur C est un point P tel que $\varphi_W(P)$ est un point de n -torsion de la jacobienne qui n'est pas de n' -torsion pour tout $0 < n' < n$.

Théorème 3. *Soit $g \geq 2$ et $n > 2$, il existe une courbe hyperelliptique totalement réelle de genre g , un point de Weierstraß W sur C et un point $P \in C$, tels que P est un point de n -torsion si et seulement si $n > 2g$.*

De fait, je montrerai qu'il n'existe aucune courbe hyperelliptique de genre g avec un point de n -torsion primitif pour $2 < n < 2g$. De nombreux exemples de points de n -torsion sont déjà connus (voir par exemple [BZ19, Lep97] entre beaucoup d'autres) et le théorème 3 est prouvé en genre 2 dans le paragraphe 4 de [BG02]. Toutefois, ce

résultat ne semble pas connu pour $g \geq 3$. La preuve de celui-ci se fait par récurrence sur le genre des courbes hyperelliptiques, en associant les techniques de dégénération des différentielles abéliennes de [BCG⁺18] et la relation entre la différentielle canonique et l'équation de Pell-Abel détaillée dans la section 2.

Structure. Cet article est organisé de la façon suivante. Dans la section 2, je donne les rappels sur l'équation de Pell-Abel et la preuve du théorème 1 sur le degré des solutions. La section 3 est dédiée à l'application aux k -différentielles. Le théorème 2 et une généralisation de celui-ci y sont prouvés. Dans cette section, je donne aussi quelques rappels sur les k -différentielles, qui peuvent être utiles à la section précédente, et sur leurs dégénération. Dans la section 4, après quelques rappels sur les points de n -torsion, je prouverai le théorème 3.

Remerciements. Cet article vient du mon envie de comprendre la partie liée aux différentielles abéliennes du séminaire Bourbaki de Jean-Pierre Serre [Ser18]. Je remercie donc Nicolas Bourbaki d'organiser son séminaire et de mettre les vidéos en accès libre sur internet. Je remercie Mikhail Sodin de m'avoir procuré une copie de la traduction anglaise de [SY92] et John Boxall pour avoir porté à ma connaissance certaines références. Enfin je remercie Jean-Pierre Serre et Andrei Bogatyrëv pour leurs commentaires bienveillants sur un brouillon de ce texte.

2 Équation de Pell-Abel et différentielle canonique

Le but de cette section est de prouver le théorème 1 sur les solutions de l'équation de Pell-Abel. Pour cela, je commencerai par une discussion de cette équation et de la différentielle canonique sur les courbes hyperelliptiques totalement réelles. Elle s'inspire du paragraphe 2 de [Ser18] dont je suivrai les notations. D'autres bonnes références sur l'équation de Pell-Abel sont [Bog12] et [SY92], où de nombreuses autres sources sont données et [Bog99], dont la section 2 est proche de cette section.

2.1 L'équation de Pell-Abel sur les courbes hyperelliptiques

On fixe un entier $g \geq 0$ et on se donne $2g + 2$ nombres réels

$$a_0 < b_0 < a_1 < \dots < a_g < b_g.$$

Pour chaque $j = 0, \dots, g$ on note $E_j = [a_j, b_j]$ et E la réunion des E_j . On définit le polynôme

$$D(x) = \prod_{i=0}^g (x - a_i)(x - b_i)$$

et la courbe hyperelliptique affine C_D^{aff} de genre g donnée par l'équation $y^2 = D(x)$. Sa complétée C_D s'obtient en lui ajoutant deux points à l'infini, que l'on note ∞_+ et ∞_- .

Ces points sont caractérisés par le fait que y/x^{g+1} prend respectivement la valeur 1 au premier et -1 au second. Une courbe hyperelliptique ramifiée uniquement au dessus de point réels, comme C_D , est appelée *totalemt réelle*. Notons que $D(x)$ est inférieur ou égal à 0 si $x \in E$ et strictement supérieur à 0 sinon.

L'algèbre affine de C_D^{aff} est un $k[x]$ -module libre de base $\{1, y\}$. Ses éléments inversibles sont de la forme :

$$f = P + yQ, \text{ avec } P, Q \in \mathbb{C}[x] \text{ et } P^2 - DQ^2 = c \text{ où } c \in \mathbb{C}^*. \quad (2)$$

On supposera que les polynômes P et Q sont unitaires et que Q est non nul. Ce second point revient à ne pas considérer les solutions triviales $(\pm \sqrt{c}, 0)$. L'équation $P^2 - DQ^2 = c$ est appelée *équation de Pell-Abel* car elle apparaît pour la première fois dans [Abe26] généralisant l'équation diophantienne de Pell. Le *degré* d'une solution f est le degré de P . On dira que f est une solution *primitive* si le degré de P est minimal (parmi les solutions distinctes de $f = \pm \sqrt{c}$).

Une différence importante entre les équations de Pell celle de Pell-Abel est que cette dernière n'a pas toujours de solutions non triviales. De façon plus précise, soit r un entier supérieur ou égal à 1. Il y a équivalence entre les deux conditions suivantes.

(i) L'équation (2) possède une solution de degré r .

(ii) Le diviseur $r(\infty_+ - \infty_-)$ de la courbe C_D est linéairement équivalent à 0.

On peut reformuler le point (ii) de la manière suivante. Soit J_D la jacobienne de C_D . Le diviseur $\infty_+ - \infty_-$ définit un point P_∞ de J_D . Le point (ii) signifie que $rP_\infty = 0$, autrement dit que P_∞ est un point d'ordre fini divisant r . De plus, cet ordre est égal à r si la solution est primitive de degré r .

En genre $g = 0$, le fait que $J_C = 0$ implique donc que l'équation de Pell-Abel a des solutions pour tout $r \geq 1$. Les solutions sont données par les polynômes de Tchebychev usuels P, Q respectivement de première et seconde espèce (modulo normalisation). Dans le cas $g = 1$, la jacobienne est égale à la courbe et l'existence de points de r -torsion pour $r \geq 2$ est claire. Si $g \geq 2$, il est facile de construire des exemples de courbes hyperelliptiques dont l'équation de Pell-Abel n'a pas de solution. Par exemple, dans le cas $g = 2$, s'il existe une solution primitive de degré r de l'équation de Pell-Abel sur C_D , alors il existe une r -différentielle primitive avec un unique zéro d'ordre $2r$ en ∞_+ (voir la section 3 pour plus de détails). On sait par le théorème 1.1 de [BCG⁺19] que la dimension de l'espace des modules des r -différentielles primitives avec un unique zéro sur les surfaces de Riemann de genre 2 est égal à 3. Donc sa projection à \mathcal{M}_2 est de dimension 2 et les courbes hyperelliptiques qui possèdent des solutions primitives de degré r à l'équation de Pell-Abel forment des diviseurs (éventuellement non irréductibles) dans \mathcal{M}_2 .

2.2 La différentielle canonique

Je vais maintenant introduire la *différentielle canonique* sur une courbe hyperelliptique totalement réelle C_D , tout d'abord arbitraire puis telle que l'équation de Pell-Abel possède une solution. Je souhaite souligner ici que cette différentielle n'est pas canoniquement associée à une courbe hyperelliptique abstraite C , mais qu'elle dépend du choix du

polynôme D définissant la surface C . Quelques rappels sur les différentielles abéliennes sont donnés dans la section 3 et peuvent être utiles au lecteur peu familier avec cette théorie.

Différentielle canonique sur une courbe hyperelliptique totalement réelle. On se donne une courbe hyperelliptique totalement réelle C_D . Étant donné un polynôme unitaire $A \in \mathbb{R}[x]$ de degré g , on lui associe la forme différentielle $\eta_A = \frac{A(x)}{y} dx$ sur C_D . Cette forme est holomorphe ailleurs qu'en l'infini et possède un pôle simple en ∞_+ et en ∞_- , dont les résidus sont respectivement -1 et $+1$. Notons que η_A est une forme de troisième espèce et que changer A revient à ajouter à η_A une forme de première espèce, i.e. une différentielle holomorphe. Puisque l'espace vectoriel des différentielles holomorphes a pour base les formes $\frac{x^j}{y} dx$ avec $0 \leq j < g$, on en déduit qu'il existe un unique polynôme A tel que

$$\int_{b_{j-1}}^{a_j} \frac{A(x)}{\sqrt{D(x)}} dx = 0 \text{ pour } j = 1, \dots, g. \quad (3)$$

Ces intégrales sont les *périodes réelles* de η_A . Dans cette formule, on note \sqrt{t} la racine positive. Dans la suite, si t est négatif, on définit \sqrt{t} comme $i\sqrt{-t}$. On peut donc introduire l'objet central de cette section.

Définition 2.1. Le polynôme A satisfaisant l'équation (3) est le *polynôme canonique* de C_D et est noté R . La forme différentielle η_R est la *différentielle canonique* de C_D , que l'on notera simplement η .

La formule (3) dit que dans chaque intervalle intermédiaire $T_j = [b_{j-1}, a_j]$ l'intégrale de $\eta = \frac{R(x)}{\sqrt{D(x)}}$ est nulle. Cela entraîne que $R(x)$ change de signe dans T_j , donc s'annule en au moins un point intérieur de T_j . Comme le nombre des j est égal au degré de R , on obtient le résultat suivant.

Lemme 2.2. *Le polynôme $R(x)$ a une racine et une seule à l'intérieur de chaque T_j et n'a aucune autre racine (réelle ou complexe).*

Comme les zéros de η sont les préimages des racines de R , le lemme 2.2 implique que la différentielle canonique η possède exactement $2g$ zéros simples. On note z_j le zéro de η dont la projection par l'application hyperelliptique appartient à l'intervalle T_j et tel que la partie réelle de l'intégrale de η de b_{j-1} à z_j est positive. Le zéro qui est conjugué à z_j par l'involution hyperelliptique est noté \bar{z}_j .

On s'intéresse maintenant aux $g + 1$ intégrales

$$\eta_j = \int_{a_j}^{b_j} \frac{R(x)}{\sqrt{D(x)}} dx = \int_{a_j}^{b_j} \eta, \text{ pour } j = 0, 1, \dots, g. \quad (4)$$

Les nombres $2\eta_j$ sont appelés les *périodes imaginaires* de la différentielle canonique η . Notons que comme R est un polynôme réel et $D(x) \leq 0$ pour $x \in E$, les parties réelles des η_j sont nulles.

Je vais maintenant énoncer une propriété importante satisfaite par les périodes imaginaires. Cette propriété est une conséquence du théorème des résidus et du fait que les résidus aux pôles de η sont ± 1 . Les détails sont donnés à la fin de la section 2.3 de [Ser18].

Lemme 2.3. *Il existe des signes $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$ tels que l'on ait :*

$$\sum_{0 \leq j \leq g} \varepsilon_j \eta_j = i\pi.$$

J'introduis maintenant les dernières quantités qui vont permettre de paramétrer les différentielles canoniques. Pour $j = 1, 2, \dots, g$ on définit les valeurs

$$\lambda_j = \int_{b_{j-1}}^{z_j} \eta = \int_{a_j}^{z_j} \eta. \quad (5)$$

On appelle les quantités $2\lambda_j$ les *périodes plates* de η . En effet, elles correspondent à l'intégrale de η entre les zéros \bar{z}_j et z_j .

Différentielle canonique si l'équation de Pell-Abel a une solution. Jusqu'à présent, la discussion ne dépendait pas du fait que l'équation de Pell-Abel possède une solution sur C_D ou non. Dans la suite de ce paragraphe, je travaillerai sous l'hypothèse que cette équation possède une solution $f = P + yQ$ de degré r sur C_D .

Le premier résultat relie la solution de Pell-Abel à la différentielle canonique.

Lemme 2.4. *Soit C_D une courbe hyperelliptique totalement réelle telle que l'équation de Pell-Abel possède une solution $f = P + yQ$ de degré r . La différentielle canonique η de C_D est égale à*

$$\eta = r \frac{df}{f} \quad (6)$$

Il est clair que df/f possède deux pôles simples en ∞_+ et ∞_- de résidus respectifs $-r$ et r . Pour prouver que $df/f = r\eta$, il suffit donc de prouver que les périodes réelles de la forme df/f sont nulles. Pour $j = 1, \dots, g$, on considère f comme une fonction $f(x)$ sur l'intervalle $T_j = [b_{j-1}, a_j]$ en choisissant une détermination de y . Cela permet de considérer f comme une fonction $f(x)$ sur T_j . Comme cette fonction est réelle, et ne s'annule pas, on en déduit que $f(b_{j-1}) = f(a_j) = \varepsilon \sqrt{c}$, avec $\varepsilon = \pm 1$. L'intégrale de df/f est donc la fonction $\log(\varepsilon f)$ qui prend les mêmes valeurs aux extrémités de T_j . Cela entraîne que l'intégrale sur T_j de sa dérivée est nulle et donc le lemme 2.4.

On peut maintenant préciser le lemme 2.3 dans le cas où l'équation de Pell-Abel est résoluble sur C_D . Rappelons que η_i est la i ème période imaginaire de η .

Proposition 2.5. *Soit C_D une courbe hyperelliptique totalement réelle telle que l'équation de Pell-Abel possède une solution de degré r et η sa différentielle canonique. Les $r_j = r|\eta_j|/\pi$ sont des nombres entiers qui satisfont l'équation*

$$\sum_{0 \leq j \leq g} |\eta_j| = r. \quad (7)$$

Fixons l'un des intervalles $E_j = [a_j, b_j]$ avec $j = 0, \dots, g$. On considère f comme une fonction $f(x) = P(x) + iy_1(x)Q(x)$ sur E_j , où y_1 est la fonction $y_1(x) = \sqrt{-D(x)}$. Cette fonction est à valeurs complexes et de module \sqrt{c} . On peut donc l'écrire sous la forme $f(x) = \sqrt{c}e^{i\theta(x)}$, avec $\theta: E_j \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. On peut relever θ en une fonction continue $\theta: E_j \rightarrow \mathbb{R}$ en lui imposant sa valeur en a_j . Comme $f(a_j) = \pm\sqrt{c}$, cette valeur est de la forme $c_0\pi$, avec $c_0 \in \mathbb{Z}$. La valeur de f en b_j est alors $c_1\pi$ avec $c_1 \in \mathbb{Z}$. On a donc :

$$P(x) = \sqrt{c} \cos(\theta(x)) \text{ et } y_1(x)Q(x) = \sqrt{c} \sin(\theta(x)).$$

De plus, par le lemme 2.4 on a :

$$\int_{a_j}^{b_j} \frac{\eta}{r} = \int_{a_j}^{b_j} \frac{df}{f} = i \int_{a_j}^{b_j} d\theta = i(\theta(b_j) - \theta(a_j)) = (c_1 - c_0)i\pi.$$

Le nombre $r_j = |c_1 - c_0|$ est donc un entier strictement supérieur à 0. Par le lemme 2.3, il existe des signes \pm tels que :

$$\sum_j \pm r_j = r. \tag{8}$$

Il reste donc à montrer que tous les signes sont positifs. Comme θ est strictement monotone sur E_j entre $c_0\pi$ et $c_1\pi$, son cosinus s'annule $|c_1 - c_0|$ fois. Cela implique que le nombre de racines de P dans E_j est r_j et comme P a au plus r racines, on a donc :

$$\sum_j r_j \leq r. \tag{9}$$

L'équation (7) est alors obtenue en comparant les équations (8) et (9).

Je vais maintenant résumer les différents résultats obtenus précédemment. Rappelons que pour tout $j = 0, \dots, g$, on pose $r_j = r|\eta_j|/\pi$, où η_j est la j -ième demi-période imaginaire de la différentielle canonique η définie par l'équation (4).

Proposition 2.6. *Soit η la différentielle canonique d'une courbe hyperelliptique de genre g totalement réelle C_D telle que l'équation de Pell-Abel possède une solution de degré r . On a alors les propriétés suivantes.*

- (i) *La différentielle η possède $2g$ zéros simples et 2 pôles simples dont les résidus sont ± 1 .*
- (ii) *Les g périodes réelles de η sont nulles.*
- (iii) *Les r_j sont des entiers strictement positifs de somme r .*

Une différentielle canonique satisfaisant à la condition (iii) de la proposition 2.6 est dite de degré r . De plus, si les r_j sont premiers entre eux on dit que la différentielle est primitive. On vérifie facilement que si f est primitive, alors la différentielle est primitive.

Cette proposition possède déjà des conséquences intéressantes sur les solutions de l'équation de Pell-Abel. En particulier, je souhaite faire la remarque suivante, qui se trouve dans le paragraphe 5.1 de [SY92].

Remarque 2.7. Le point (iii) de la proposition 2.6 implique est qu'il n'existe pas de solution de degré $r \leq g$ de l'équation de Pell-Abel sur une courbe hyperelliptique totalement réelle de genre g . Ce résultat est valable pour toutes les courbes hyperelliptiques complexes comme je le montrerai dans la section 4.2.

La structure plate d'une différentielle canonique. Pour terminer la discussion des différentielles canoniques, je vais décrire la représentation plate d'une différentielle qui satisfaisait aux conditions de la proposition 2.6. Le lecteur non familier avec cette théorie pourra consulter la section 3.1 et les nombreuses références sur le sujet, comme par exemple [MT02, Zor06]. Notons que par le lemme 2.8 ci-dessous, cette différentielle est une différentielle canonique (indépendamment du choix des périodes plates λ_i).

Dans la figure 1, je représente la surface de translation associée à une différentielle primitive de degré $r = 3$ (après multiplication par π/r) sur une courbe hyperelliptique totalement réelle de genre 2. Cette surface de translation est obtenue de la façon suivante. On prend un cylindre horizontal infini de hauteur $2r$ et on considère un point a_0 sur celui-ci. On fait $2g$ coupures horizontales de la façon suivante. Pour tout $i = 1, \dots, g$ la coupure c_i^+ , resp. c_i^- , est de longueur $2\lambda_i$, centrée sur le point à une distance $\sum_{j=1}^i r_j$ au dessus, resp. en dessous, de a_0 . On obtient alors deux composantes de bord pour chaque coupure, que j'appelle *lèvres supérieures* et *inférieures* respectivement. On identifie alors par translation (verticale) la lèvre inférieure de c_i^+ avec la lèvre supérieure de c_i^- . On identifie de même la lèvre supérieure de c_i^- avec la lèvre inférieure de c_i^+ . Ces identifications sont représentées sur la figure 1 par des segments de même couleur. Grâce à la correspondance exposée à la section 3.1, la surface de translation ainsi définie correspond à une différentielle abélienne.

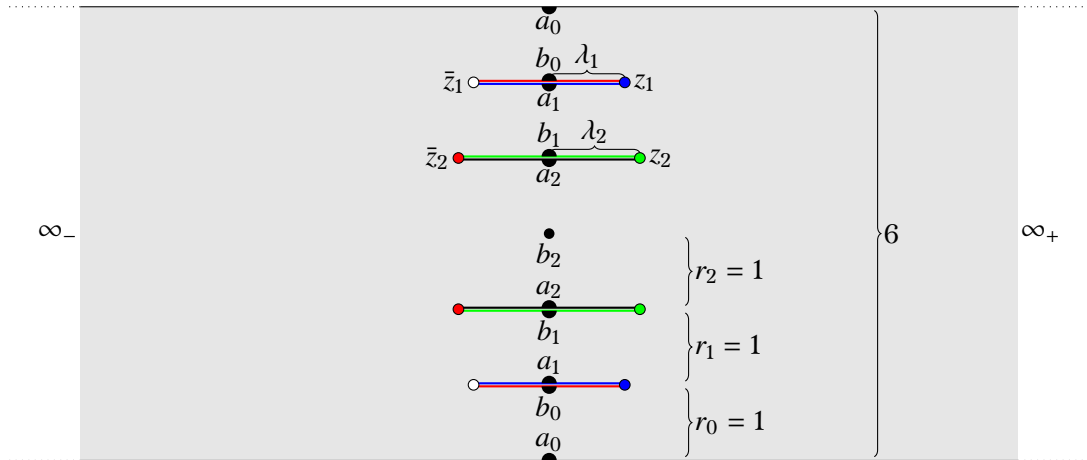


FIGURE 1 – Une différentielle canonique (multipliée par $\frac{r}{\pi}$) en genre 2 et de degré $r = 3$.

Les points a_i et b_j sur cette surface de translation sont donnés de la façon suivante. Le point b_i pour $i < g$ correspond au milieu du segment obtenu en identifiant la lèvre inférieure de c_{i+1}^+ avec la lèvre supérieure de c_{i+1}^- . Le point b_g est le point qui se trouve au dessus de a_0 à distance r . Le point a_i pour $i > 0$ correspond au milieu du segment obtenu en identifiant la lèvre supérieure de c_i^+ avec la lèvre inférieure de c_i^- . Enfin, les zéros z_i et \bar{z}_i de la différentielle correspondent respectivement aux sommets de droite et de gauche des segments c_i^\pm .

Je justifie maintenant que la différentielle représentée sur la figure 1 possède bien les propriétés de la proposition 2.6 avec $r = 3$. Le fait que la distance entre les points a_i

et b_{i+1} est nulle implique directement le point (ii) de la proposition. Le point (iii) est clair par construction. Pour le point (i), on constate que les singularités coniques de la surface de translation sont d'angle 4π . Par le dictionnaire entre surfaces de translations et différentielles, ces singularités correspondent à des zéros d'ordre 1 de la différentielles. Les deux fins du cylindres correspondent à deux pôles simples. Et, par le théorème des résidus, la hauteur du cylindre est égal au résidu du pôle correspondant, modulo $\pm 2i\pi$. Cela conclut la vérification du point (i).

On peut considérer la préimage de l'axe réel sur les courbes hyperelliptiques totalement réelles. Elle possède deux composantes qui s'intersectent au dessus des points de ramifications a_i et b_j . Il s'agit des deux demi-droites horizontale qui viennent de $\pm\infty$ et arrivent en a_0 . L'image du segment $E_0 = [a_0, b_0]$ est composé des deux segments verticaux dénotés par $[a_0, b_0]$ sur la figure. Par la suite, on obtient sur la figure les segments notés $[b_0, z_1]$ et $[b_0, \bar{z}_1]$. Puis les deux segments $[z_1, a_1]$ et $[\bar{z}_1, a_1]$. L'union de ces quatre segment est l'image du segment T_1 . Puis on a les deux segments verticaux $[a_1, b_1]$ et on continue ainsi jusqu'à arriver au point b_g . Du point b_g l'image est constituée des deux demi-droites horizontales qui pointent vers $\pm\infty$.

2.3 La preuve du théorème 1

Je vais commencer la preuve du théorème 1 par un lemme fondamental sur les différentielles canoniques. Ce résultat est similaire au théorème 2.1 de [Bog12] et au résultat énoncé dans la section 5.5 de [SY92].

Lemme 2.8. *Soit ω une différentielle satisfaisant aux conditions de la proposition 2.6, alors ω est une différentielle canonique de degré r sur une courbe hyperelliptique totalement réelle.*

La preuve de ce résultat s'appuie sur le très bel argument d'Achieser exposé dans la section 5.4 de [SY92]. Elle repose sur la formule de Schwarz-Christoffel, qui est par exemple exposée dans [dSG10, IV.2.3], et qui s'énonce de la façon suivante. Étant donné un domaine polygonal simplement connexe P dont les sommets sont w_1, \dots, w_N et d'angles intérieurs $\lambda_1\pi, \dots, \lambda_N\pi$. Soit $\phi: \mathbb{H} \rightarrow P$ une uniformisante qui s'étend en un homéomorphisme sur chaque arête de P et qui envoie l'infini sur le point w_N . Il existe $N-1$ nombres réels $\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}$ tels que

$$\phi(z) = C \int_{z_0}^z \frac{dw}{(w - \alpha_1)^{1-\lambda_1} \dots (w - \alpha_{N-1})^{1-\lambda_{N-1}}}. \quad (10)$$

Dans la preuve je vais utiliser cette formule avec des polygones spéciaux que j'introduis maintenant. Un *peigne* est une demi-bande horizontale avec des coupures horizontale. Plus précisément, soient $M \in \mathbb{N}^*$ et $g \leq M-1$ des entiers naturels, on définit le peigne $\Pi_M(q_1, \dots, q_g; h_1, \dots, h_g)$ avec $q_1 < \dots < q_g$ des entiers contenus dans l'intervalle $[1, N-1]$ et $h_i > 0$ par l'ensemble

$$\{\xi \in \mathbb{C} : \Re(\xi) > 0 \text{ et } 0 < \Im(\xi) < M\pi\} \setminus \bigcup_{j=1}^g \{\Im(\xi) = \pi q_j \text{ et } 0 < \Re(\xi) < h_j\}. \quad (11)$$

La figure 2 donne un exemple de peigne avec deux coupures horizontales, qui est lié à la différentielle de la figure 1.

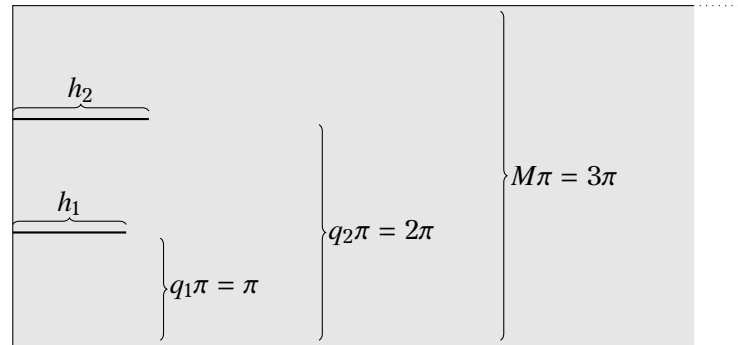


FIGURE 2 – Le peigne $\Pi_M(1, 2; h_1, h_2)$ avec $M = 3$.

Ces rappels fait, je suis maintenant en mesure de donner la preuve du lemme 2.8.

Démonstration. On considère sur une courbe totalement réelle C_D une différentielle ω satisfaisant aux conditions de la proposition 2.6. Le quotient de ω par l'involution hyperelliptique donne une différentielle quadratique η sur \mathbb{P}^1 qui possède g zéros doubles, $2g + 2$ pôles simples et un unique pôle double dont le résidu quadratique est égal à 1. Une telle différentielle quadratique est représentée dans la figure 3 en prenant le quotient de la différentielle de la figure 1.

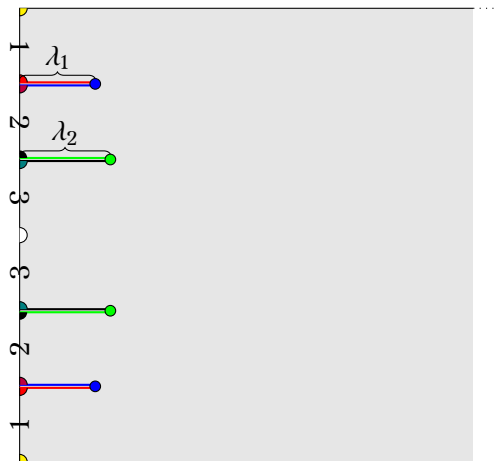


FIGURE 3 – La différentielle quadratique (multipliée par $\frac{z}{\pi}$) sur \mathbb{P}^1 obtenue par quotient de la différentielle de la figure 1. Les arêtes indexées par le même numéro sont identifiées deux à deux par une rotation d'angle π et une translation verticale.

On peut alors restreindre η au demi-plan supérieur \mathbb{H} et considérer son représentation plate obtenue en intégrant l'une des deux racines de η . Cela revient, quitte à considérer

l'autre racine, à restreindre la différentielle quadratique de la figure 3 à la moitié inférieure du dessin. On obtient alors le peigne représenté dans la figure 2 avec $h_i = \lambda_i/\pi$. Il est clair qu'en général on obtient un peigne, que je noterai Π_ω . Plus précisément, le peigne Π_ω est donné par $\Pi_r(q_1, \dots, q_g; r\lambda_1/\pi, \dots, r\lambda_g/\pi)$, où $q_i = \sum_{j=1}^i r_{j-1}$ avec les r_j définis dans le paragraphe précédent la proposition 2.6 et les λ_i les demi-périodes plates de ω . On note ϕ le biholomorphisme entre le peigne Π_ω et \mathbb{H} normalisé en imposant

$$\phi(a_0) = 0, \phi(b_g) = i\pi r \text{ et } \phi(\infty) = \infty.$$

Le biholomorphisme ϕ est donné par l'inverse de l'application de Schwarz-Christoffel :

$$\phi: \mathbb{H} \rightarrow \Pi_\omega : z \mapsto r \int_{a_0}^z \frac{(w - c_1) \cdots (w - c_g)}{(w - a_0)^{1/2}(w - b_0)^{1/2} \cdots (w - a_g)^{1/2}(w - b_g)^{1/2}} dw, \quad (12)$$

avec $a_i, b_j, c_k \in \mathbb{R}$. On en déduit que le polynôme D est égal à

$$D(w) = \prod_{i=0}^g (w - a_i)(w - b_i)$$

et que le polynôme canonique R est

$$R(w) = (w - c_1) \cdots (w - c_g).$$

Maintenant, on définit sur la droite réelle la fonction

$$P(x) = \cos(in\phi(x)). \quad (13)$$

Notons que cette fonction est analytique et s'étend à \mathbb{C} en une fonction holomorphe par la même formule. De plus, pour tout $i \in \{0, \dots, g\}$ elle possède r_i zéros sur l'intervalle E_i et ne s'annule pas ailleurs. Comme ϕ est un homéomorphisme sur ces intervalles, les zéros de P sont simples. On en déduit que P est un polynôme de degré r .

Il reste à vérifier que P vérifie l'équation de Pell-Abel sur C_D . Il est clair que la fonction $S(x) = \sin(in\phi(x))$ satisfaisait à l'équation $P^2 + S^2 = 1$. On en déduit que S est un polynôme. Il reste à vérifier que S est divisible par D . Cela est clairement impliqué par le fait que l'ensemble des racines de S contient les points a_i et b_j . C.Q.F.D.

Avant de passer à la preuve du théorème 1 je souhaite faire quelques commentaires sur le résultat que l'on vient de prouver.

L'un des points fondamentaux de la preuve est d'écrire P comme le cosinus d'une intégrale hyperelliptique. Il existe d'autres moyens d'obtenir ce résultat. L'un des plus élégant est donné via les équations différentielles ordinaires. On pourra se reporter à la section 2 de [Bog10] pour obtenir cette version.

La figure 4 donne le polynôme associé à la différentielle de la figure 1. Le polynôme R est égal à $(x - c_1)(x - c_2)$. De plus, c_i est l'image de z_i et \bar{z}_i par l'involution hyperelliptique. La période plate λ_i est simplement égale à l'intégrale de la forme $R/\sqrt{D}dx$ du point b_{i-1} à c_i . Le fait que chaque intervalle E_i possède un unique zéro de P est équivalent au fait que $r_i = 1$.

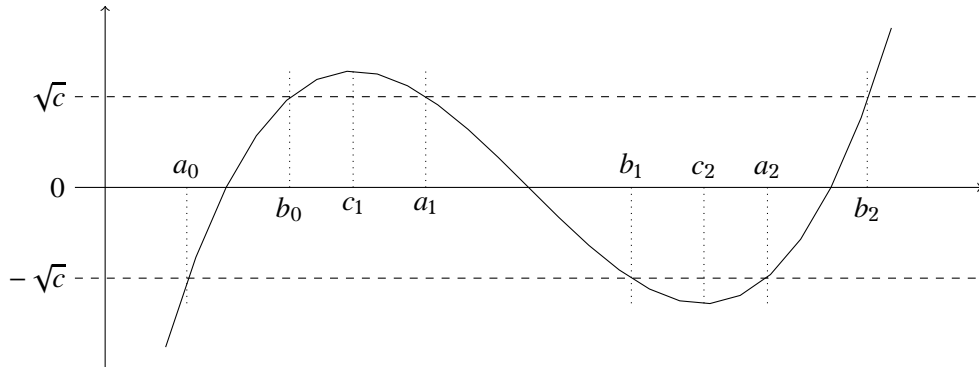


FIGURE 4 – Le polynôme P associé à la différentielle canonique de la figure 1.

On peut se demander si, étant donnée une différentielle canonique, on peut trouver de manière effective l'équation de la courbe hyperelliptique C_D et le polynôme P . Ce problème est très difficile en général, mais des résultats intéressants ont été obtenus par [Ach28] et développés dans [Bog99] via les fonctions automorphes.

Il me semble enfin utile d'écrire explicitement l'un des points essentiels de la preuve du lemme 2.8. Ce résultat formalise la relation entre le peigne de la figure 2 et la différentielle de la figure 1.

Proposition 2.9. *Soit Π un peigne, alors la structure plate associée à la différentielle canonique associée à Π est obtenue de la façon suivante.*

1. *Faire une réflexion de Π le long de \mathbb{R} .*
2. *Faire une rotation centrale au point $(0, 0)$.*
3. *Identifier par translation verticale les droites du bord du domaine ainsi créé.*
4. *Pour chaque segment obtenu par les images des dents du peigne, identifier par translation la partie supérieure du segment avec la partie inférieure du segment d'ordonnée opposée.*

Je donne maintenant la preuve du théorème 1. Rappelons que celui-ci donne l'existence d'une solution primitive de degré r de l'équation de Pell-Abel sur une courbe hyperelliptique totalement réelle de genre g si et seulement si $r \geq g + 1$.

Démonstration. Au vu de la remarque 2.7, il suffit de montrer qu'il existe des solutions de degré r pour tout $r \geq g + 1$. Donc par le lemme 2.8, il suffit de montrer qu'il existe une différentielle canonique de degré r sur une surface de genre g qui n'est pas de degré r' pour un $r' < r$. Pour cela il suffit de considérer les entiers $r_i = 1$ pour $i \in \{0, \dots, g - 1\}$ et $r_g = r - g$. On considère alors pour $q_i = \sum_{j=1}^i r_{j-1}$ le peigne

$$\Pi_r(q_1, \dots, q_g; r\lambda_1/\pi, \dots, r\lambda_g/\pi)$$

avec $\lambda_i > 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, g\}$. On obtient alors une différentielle satisfaisant les conditions de la proposition 2.6 grâce à la proposition 2.9. Par le lemme 2.8, cette différentielle est canonique d'ordre r sur une surface totalement réelle de genre g . Le choix

des r_i impliquent qu'elle est primitive. Donc la solution de l'équation de Pell-Abel associée à cette différentielle est primitive. C.Q.F.D.

On peut de plus déduire une description de l'ensemble des composantes connexes des lieux formés par les couples donnés par les différentielles canonique primitive de degré r sur les courbes hyperelliptiques totalement réelles de genre g sur lesquelles l'équation de Pell-Abel est résoluble. Un résultat similaire est donné par l'équation (19) de [Bog99].

Corollaire 2.10. *L'espace des modules des différentielles canonique primitive de degré r sur les courbes hyperelliptiques totalement réelles de genre g satisfaisant à l'équation de Pell-Abel est une union de cônes ouverts $(\mathbb{R}_+^*)^{g-1}$, où cette union est prise sur toute les partitions (r_0, \dots, r_g) de r à $g + 1$ éléments tels que $\text{pgcd}(r_0, \dots, r_g) = 1$.*

Pour terminer cette section, je donne une remarque sur le corps de définition des courbes considérées.

Remarque 2.11. On peut se demander si il existe des courbes algébriques définies sur \mathbb{Q} ou un autre sous-corps de \mathbb{R} avec des points de r -torsions (voir entre beaucoup d'autres références [Lep97]). Afin d'étudier ce problème, [Pak98] associe un graphe aux courbes hyperelliptiques avec un point de r -torsion. Ce graphe est la préimage du segment $[-\sqrt{c}, \sqrt{c}]$ par le polynôme P . Dans le cas des courbes hyperelliptiques totalement réelles, on obtient une union de $g + 1$ segments disjoints. Chacun de ces segments contient $r_i - 1$ sommets en son intérieur. Donc ce cas ne semble pas être le cas le plus adéquat pour étudier ce problème.

3 Les k -différentielles

Dans cette section, je donne tout d'abord quelques rappels sur les k -différentielles méromorphes et la structure plate qui leur est associée pour tout $k \geq 1$. Beaucoup plus d'informations peut se trouver dans [MT02, Zor06, Str84] dans le cas des différentielles abéliennes et quadratiques et [BCG⁺19] dans celui des k -différentielles pour $k \geq 3$. Une fois ces rappels fait, je donnerai la preuve du théorème 2.

3.1 Rappels sur les k -différentielles

Une *différentielle abélienne* est une paire (C, ω) où C est une surface de Riemann et ω est une section méromorphe non nulle du fibré cotangent K de C . Si la section est méromorphe et ne possède que des pôles simples alors on dit qu'elle est de *troisième espèce*. Dans le cas où ω est holomorphe, on dit quelle est de *première espèce*.

La différentielle ω induit par intégration une structure de translation et une métrique plate sur la surface C privée des zéros et des pôles de ω . Cette métrique s'étend aux zéros de ω en une métrique singulière. Plus précisément, un zéro d'ordre m de ω correspond à une singularité conique d'angle $(m + 1)2\pi$ de la métrique plate. De plus, un pôle simple de résidu r correspond à un cylindre infini de circonférence $2i\pi r$. On peut donner une description au voisinage des pôles d'ordres supérieur ou égaux à 2, toutefois on n'aura

besoin que du cas des pôles doubles sans résidus. La structure plate au voisinage de tels pôles est isométrique au complémentaire d'un disque dans le plan muni de la métrique euclidienne standard. Pour le cas général, le lecteur pourra se reporter à [Str84] pour plus de détails. Réciproquement, on peut associer à une surface de translation satisfaisant certaines conditions une différentielle méromorphe. Grâce à cela, on peut effectivement vérifier que la surface de translation représentée dans la figure 1 correspond à une différentielle abélienne possédant les propriétés énoncées.

Le théorème de Riemann-Roch implique qu'une différentielle ω possède $2g - 2$ zéros comptés avec multiplicité. Étant donnée une partition $\mu = (m_1, \dots, m_n)$ de $2g - 2$, on définit donc l'espace des modules des différentielles abéliennes dont les ordres des zéros sont égaux à m_1, \dots, m_n . Cet espace des modules se nomme *strate* de différentielles abéliennes de type μ et se note $\Omega\mathcal{M}_g(\mu)$. Ces strates sont des variétés orbifoldes complexes de dimension $2g - 1 + n$.

Il existe une compactification des strates de différentielles dont les éléments ont été caractérisés dans [BCG⁺18]. Ces éléments sont caractérisés par des objets, les *différentielles entrelacées*, qui sont donnés de la façon suivante. C'est une collection de différentielles satisfaisant certaines conditions sur une surface de Riemann marquée stable. Ces différentielles sont obtenues en redimensionnant sur chaque composante de la limite les familles de différentielles.

La discussion précédente peut être étendue au cas des k -différentielles pour tout $k \geq 2$. Une k -différentielle ξ est une section non nulle du produit tensoriel k ème du fibré canonique d'une surface de Riemann. Une k -différentielle en dite primitive si elle n'est pas la puissance d'une k' -différentielle avec $k' < k$.

On obtient une surface plate en intégrant la racine k ème d'une k -différentielle ξ . Cette surface est une surface dont les changements de cartes, dans le complémentaires des singularités de ξ , sont donnés par une composition de translations et de rotations d'angles multiples de $2\pi/k$. Par exemple dans le cas d'une différentielle quadratique, ces changements de cartes sont des compositions de translations et de rotations d'angles π . De manière équivalente, on peut obtenir une k -différentielle en identifiant les arêtes d'un polygone par des translations et des rotations d'angles multiples de $2\pi/k$. Une différentielle quadratique est donnée de la sorte sur la figure 3.

De plus, étant donnée une partition $\mu = (m_1, \dots, m_n)$ de $k(2g - 2)$, on considère les espaces des modules des k -différentielles dont les ordres des zéros et éventuellement des pôles sont égaux à m_1, \dots, m_n . Cet espace des modules se nomme *strate* de k -différentielles de type μ et se note $\Omega^k\mathcal{M}_g(\mu)$. Ces strates sont des variétés orbifoldes telles que les composantes paramétrant les k -différentielles primitives sont toutes de dimension complexe égale à $2g - 2 + n$.

3.2 Preuve du théorème 2

Je donne maintenant la preuve du théorème 2. Rappelons que celui-ci donne l'existence d'une k -différentielle primitive avec un unique zéro sur une surface de Riemann hyperelliptique totalement réelle sauf dans le cas particulier des différentielles quadratiques sur les courbes de genre 2.

Par le théorème 1, pour tout $r \geq g + 1$, il existe une courbe hyperelliptique totalement réelle C_D et des points (z, z') conjugués par l'involution hyperelliptique tels que

$$rz - rz' \sim O, \quad (14)$$

où O est le fibré trivial de C_D . De plus, cette équation n'est satisfaite sur C_D pour aucun $m \in \{1, \dots, r - 1\}$. De plus, comme ces points sont conjugués par l'involution hyperelliptique, on a l'égalité classique

$$(g - 1)z + (g - 1)z' \sim K, \quad (15)$$

où K est le fibré canonique de C_D . Prenons maintenant $r = k(g - 1)$, on obtient des équations (14) et (15) que

$$2rz = kK. \quad (16)$$

Donc z est l'unique zéro d'une k -différentielle ξ . Le fait que r est minimal implique que ξ est une k -différentielle primitive. Comme $r \geq g + 1$, on a l'existence d'une k -différentielle primitive qui possède un unique zéro pour tout $k \geq \frac{g+1}{g-1}$. L'unique restriction induite par cette inégalité est dans le cas $g = k = 2$. Il est bien connu qu'il n'existe pas de différentielles quadratiques primitives en genre 2 avec un unique zéro. Cela conclut la preuve du théorème 2.

Avant de passer à la section suivante, je souhaite noter les points suivants.

- Remarque 3.1.*
1. Le lieu hyperelliptique est de dimension $2g - 1$ et la projection de $\Omega^k \mathcal{M}_g(k(2g - 2))$ de dimension $2g - 2$ dans l'espace des modules \mathcal{M}_g . Il n'est donc pas a priori évident que ces deux lieux s'intersectent.
 2. En genre 2 on peut donner une représentation plate des k -différentielles de $\Omega^k \mathcal{M}_2(2k)$ (voir par exemple [Gen]). Je ne connais aucun moyen de savoir si cette représentation plate correspond à une k -différentielle sur une surface totalement réelle. De plus, dans le cas des courbes de genre $g \geq 3$ je ne connais aucun moyen de déterminer si une représentation plate d'une telle k -différentielles est sur une courbe hyperelliptique (réelle ou même complexe).
 3. Il serait intéressant de pouvoir donner une relation directe entre les représentations plates des différentielles canoniques et des k -différentielles induites.

3.3 k -différentielles dont le diviseur est de support est conjugué

Dans cette section, je vais généraliser le théorème 2 au cas des k -différentielles dont le diviseur est supporté sur des points $(z, \iota(z))$, où ι est l'involution hyperelliptique. Le résultat suivant donne une description de cette situation.

Proposition 3.2. *Soient C une courbe hyperelliptique de genre g et $k \geq 2$. S'il existe une k -différentielle primitive ξ sur C telle que $(\xi) = nz + n'\iota(z)$ avec $n > n' \geq 0$, alors l'équation de Pell-Abel est résoluble sur C et $2k(g - 1) \geq n \geq (k + 1)g - (k - 1)$.*

Réciproquement, si $2k(g - 1) \geq n \geq (k + 1)g - (k - 1)$ alors il existe une courbe hyperelliptique totalement réelle C et une k -différentielle primitive ξ sur C dont le diviseur est de la forme $(\xi) = nz + n'\iota(z)$.

Notons que l'on retrouve le théorème 2 en posant $n = 2k(g - 1)$. De plus, nous ne considérons pas le cas $n = n'$ car il correspond à la puissance k ème d'une différentielle abélienne dont le diviseur est $(g - 1)z + (g - 1)\iota(z)$. La fin de cette section est constituée de la preuve de la proposition 3.2.

Soit C une courbe hyperelliptique de genre g telle qu'il existe une k -différentielle ξ holomorphe dont le diviseur est $(\xi) = nz + n'\iota(z)$ avec $n > n'$. On supposera que C est donnée par l'équation $y^2 = \prod_{i=0}^{2g+1} (x - x_i)$ et que les points z et $\iota(z)$ sont les points à l'infini ∞_{\pm} de C . Une base des k -différentielles holomorphes sur C est donnée par

$$x^i \frac{dx^k}{y^k}, \text{ pour } i \in \{0, \dots, kg - k\} \text{ et } x^i \frac{dx^k}{y^{k-1}}, \text{ pour } i \in \{0, \dots, kg - k - g - 1\}.$$

Donc une k -différentielle ξ sur C est de la forme

$$\xi = \left(\sum_{i=0}^{kg-k} (\alpha_j x^j + \beta_j x^j y) \right) \frac{dx^k}{y^k}$$

où $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{C}$ et $\beta_j = 0$ pour $j \geq kg - k - g$. De plus, le diviseur de la fonction y sur C est

$$(y) = \sum_{i=0}^{2g+1} (x_i, 0) - (g + 1)(\infty_- + \infty_+)$$

et celui de la forme dx est

$$(dx) = \sum_{i=0}^{2g+1} (x_i, 0) - 2(\infty_- + \infty_+).$$

On en déduit que le support du diviseur de dx^k/y^k est contenu dans les points ∞_{\pm} . Donc pour que le support du diviseur de ξ soit contenu dans ∞_{\pm} , il faut que la fonction $\sum (\alpha_j x^j + \beta_j x^j y)$ soit un élément inversible de l'algèbre affine de C . Comme la discussion de la section 2.1, s'étend sans difficultés aux courbes hyperelliptiques générales, on déduit de l'équation (2) que cet élément est une solution de l'équation de Pell-Abel. Supposons qu'il existe une solution primitive de degré r de Pell-Abel, alors les équations (14) et (15) donnent

$$(k(g - 1) + r)\infty_+ + (k(g - 1) - r)\infty_- \sim kK. \quad (17)$$

On a alors $n = k(g - 1) + r$ et le théorème 1 donne $r \geq g + 1$, ce qui implique que $n \geq (k + 1)g - (k - 1)$. L'inégalité $2k(g - 1) \geq n$ est une conséquence directe du fait que nous ne considérons que des k -différentielles holomorphes.

La réciproque est une conséquence directe du théorème 1 et des calculs que l'on vient de réaliser.

4 Les points de torsion

Le but de cette section est de démontrer le théorème 3 qui donne l'existence de points de n -torsion pour $n \geq 2g + 1$. Je donne quelques rappels avant de procéder à la preuve de ce résultat.

4.1 Rappels sur les points de torsion

Soit C une courbe hyperelliptique de genre $g \geq 2$. On considère un point de Weierstraß W sur C et l'application d'Abel-Jacobi $\varphi_W: C \rightarrow J_C$ qui envoie W sur l'origine. Un *point de n -torsion modulo W* sur C est un point P tel que $\varphi_W(P)$ est un point de n -torsion de la jacobienne, mais pas de n' -torsion pour tout $0 < n' < n$. Notons que les points de 2-torsion modulo W sont exactement les autres points de Weierstraß de C .

On peut étendre ces considérations au cas des surfaces de Riemann de genre 1. Dans ce cas, on fixe un point arbitraire W sur la surface C de genre 1. Un *point de N -torsion modulo W* sur C est un point P tel que P est un point de N -torsion sur la courbe elliptique (C, W) mais pas de n' -torsion pour tout $0 < n' < n$. J'appelle *points de Weierstraß* les points de 2-torsion de (C, W) .

Pour terminer ces rappels, je souhaite insister sur le fait que l'ordre n d'un point P dépend du choix du point de Weierstraß. En effet, prenons une surface de Riemann C de genre 1 donnée par le quotient de \mathbb{C} par le réseau $\mathbb{Z}v_1 \oplus \mathbb{Z}v_2$. Considérons les points W_0 et W_1 de C donnés respectivement par l'image de l'origine et de $\frac{1}{2}v_1$. Le point P_1 donné par l'image de $\frac{1}{6}v_1$ est de 6-torsion modulo W_0 et de 3-torsion modulo W_1 . Cet exemple peut se généraliser au cas des courbes hyperelliptiques de genre $g \geq 2$.

4.2 Preuve du théorème 3

Je commence par montrer que pour $3 \leq r \leq 2g$ il n'existe pas de points de r -torsion sur les courbes hyperelliptiques. Ce résultat est donné dans [Zar19, théorème 2.8] et [DR19, lemme 3.139]. Je donne ici une preuve un peu différente, mais essentiellement équivalente à celles proposées par ces auteurs.

Supposons qu'il existe un tel point P de r -torsion sur une courbe hyperelliptique C . Par définition il existe un point de Weierstraß W tel que $r(P - W) \sim \mathcal{O}$, où \mathcal{O} est le fibré trivial de C . De plus, on a l'égalité classique $(2g - 2)W \sim K$ avec K le fibré canonique de C . Donc l'existence de ce point de r -torsion est équivalente à l'existence d'une solution à l'équation

$$rP + (2g - 2 - r)W \sim K.$$

Si $r \leq 2g - 2$, la non existence de telle solution est une conséquence directe du fait que les diviseurs des différentielles sur les courbes hyperelliptiques sont invariants par l'involution hyperelliptique ι . Dans le cas $r = 2g - 1$, cela est une conséquence du théorème des résidus. En effet, il n'existe pas de différentielles avec un unique pôle simple sur une surface de Riemann compacte. Enfin, dans le cas $r = 2g$, on utilise l'égalité classique $-2W + P + \iota(P) \sim \mathcal{O}$ pour obtenir l'équation équivalente $(2g + 1)P - \iota(P) \sim K$ qui n'a pas de solutions pour la même raison que dans le cas précédent.

On montre maintenant que si $r \geq 2g + 1$, alors il existe une courbe hyperelliptique totalement réelle de genre g avec un point de r -torsion modulo un point de Weierstraß. Soit W un point de Weierstraß d'une courbe hyperelliptique totalement réelle C_D qui possède une solution primitive d'ordre r à l'équation de Pell-Abel. En notant z et z' les pôles ∞_+ et ∞_- de la différentielle canonique associée, on déduit de $z + z' \sim 2W$ l'équation

$$2rz \sim 2rW. \tag{18}$$

Cela implique que le point z est soit un point ℓ -torsion modulo W avec $\ell \nmid 2r$. Le fait que la solution est primitive de degré r et que z n'est pas de Weierstraß implique que soit $\ell = 2r$ ou $\ell = r$. Le reste de la preuve consiste à montrer que, quitte à choisir un autre point de Weierstraß, le point z est un point de r -torsion. On commence par traiter le cas du genre 1, puis le cas général par récurrence.

Fixons un point W_0 sur une surface de Riemann C de genre 1. Dans ce cas, il suffit de considérer un point primitif de r -torsion z sur la courbe elliptique (C, W_0) pour obtenir le résultat.

Je traite maintenant le cas des courbes de genre $g \geq 2$. On se donne une différentielle canonique η de degré r sur une courbe hyperelliptique totalement réelle de genre g . On peut alors déformer cette différentielle de la façon suivante, représentée sur la figure 5. Rappelons qu'une période plate de ω est l'intégrale de ω entre deux zéros conjugués

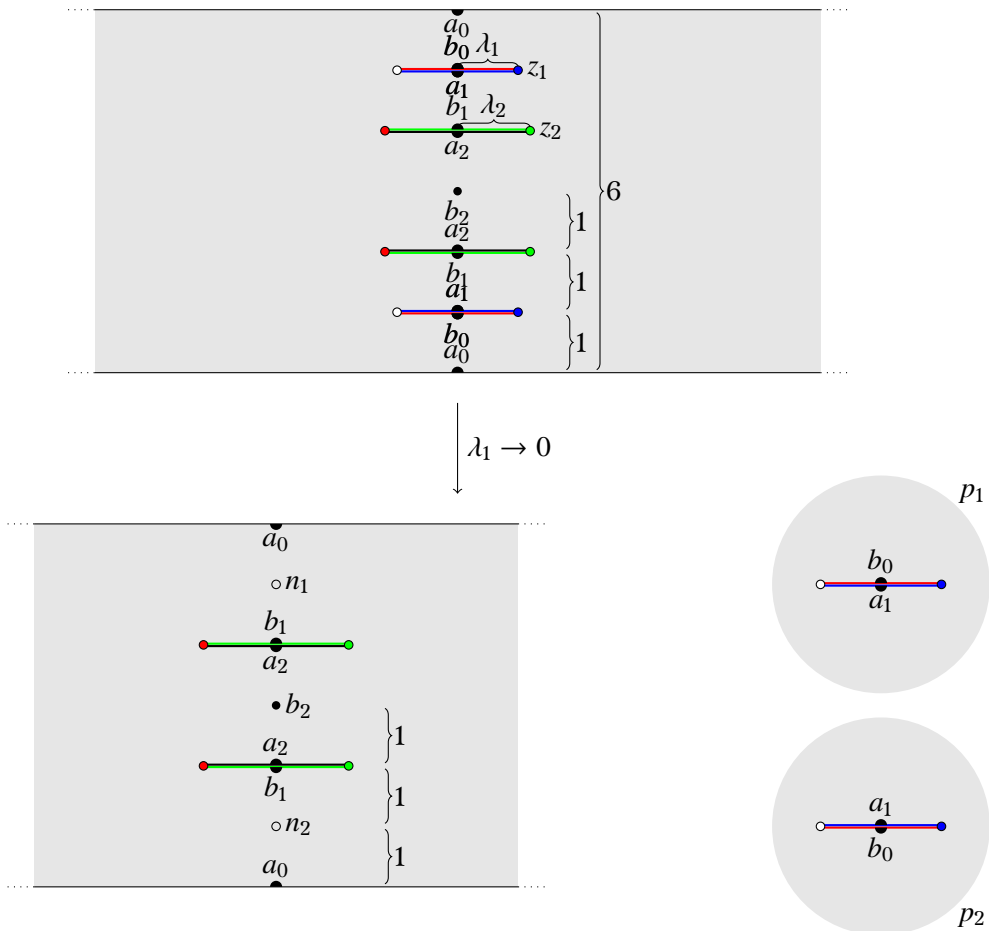


FIGURE 5 – La différentielle canonique (multipliée par $\frac{r}{\pi}$) de la figure 1 et la différentielle entrelacée obtenue par la dégénération $\lambda_1 \rightarrow 0$. La différentielle en bas à droite est obtenue en divisant cette famille de différentielles par λ_1 .

par l'involution hyperelliptique. On fait tendre une période plate, disons λ_1 , vers 0 en maintenant les autres périodes plates constantes. Notons que par le lemme 2.8, on obtient une famille de différentielles canoniques primitives de degré r .

La différentielle entrelacée (voir la section 3.1) obtenue à la limite est définie sur deux composantes qui forment une courbe banane. Une composante est une courbe hyperelliptique de genre $g - 1$ et l'autre composante est une courbe de genre 0. Rappelons qu'une courbe banane est une courbe composée de deux composantes irréductibles lisses s'intersectant en deux nœuds. Dans la figure 5, cette courbe banane est obtenue en collant les points n_i aux pôles p_i . La différentielle η_1 sur la composante C_1 de genre $g - 1$ est la différentielle que l'on voit à la limite. Elle appartient à la strate $\Omega\mathcal{M}_{g-1}(1, \dots, 1, -1, -1)$ avec $2g - 2$ zéros simples. Pour obtenir la différentielle η_2 , on multiplie la famille de différentielles par $1/\lambda_1$ et faisons tendre λ_1 vers 0. On obtient alors la différentielle représentée à droite de la figure 5. Cette différentielle est définie sur la sphère de Riemann, appartient à la strate $\Omega\mathcal{M}_0(1, 1, -2, -2)$ et les résidus aux pôles sont nuls. Notons que par le lemme 2.8 la différentielle η_1 est une différentielle canonique de degré r sur la courbe hyperelliptique totalement réelle C_1 de genre $g - 1$. De plus, on peut choisir les r_i de telle façon que la différentielle η_1 est primitive. Par récurrence, pour tout $r \geq 2g + 1$ il existe un point de Weierstraß W_1 sur C_1 tel que la différence des pôles sont de r -torsion modulo le point W_1 . La preuve du théorème 3 se conclut en utilisant le fait que l'ordre d'un point de r -torsion qui reste fini par déformation est constant.

Références

- [Abe26] Niels Abel. Ueber die Integration der Differential-Formel $\frac{\rho dx}{\sqrt{R}}$, wenn R und ρ ganze Functionen sind. *J. Reine Angew. Math.*, 1 :185–221, 1826. traduction française, Œuvres complètes, tome 1, p. 104–144, 1881.
- [Ach28] Naum Achyesser. Über einige Funktionen, die in gegebenen Intervallen am wenigsten von Null abweichen. *Bull. Soc. Phys.-Math. Kazan, III. Ser.*, 3(2) :1–69, 1928.
- [BCG⁺18] Matt Bainbridge, Dawei Chen, Quentin Gendron, Samuel Grushevsky, and Martin Möller. Compactification of strata of abelian differentials. *Duke Math. J.*, 167(12) :2347–2416, 2018.
- [BCG⁺19] Matt Bainbridge, Dawei Chen, Quentin Gendron, Samuel Grushevsky, and Martin Möller. Strata of k -differentials. *Algebr. Geom.*, 6(2) :196–233, 2019.
- [BG02] John Boxall and David Grant. Theta functions and singular torsion on elliptic curves. In *Number theory for the millennium I. Proceedings of the millennial conference on number theory*, pages 111–126. Peters, 2002.
- [Bog99] Andrei Bogatyrëv. Effective computation of Chebyshev polynomials for several intervals. *Sb. Math.*, 190(11) :15–50, 1999. traduction anglaise, Mat. Sb. 190, No. 11, 1571–1605, 1999.
- [Bog10] Andrei Bogatyrëv. Chebyshev representation for rational functions. *Sb. Math.*, 201(11) :1579–1598, 2010.

- [Bog12] Andrei Bogatyřev. *Extremal polynomials and Riemann surfaces*. Springer, 2012.
- [BZ13] Vladimir Burskii and Alexei Zhedanov. On Dirichlet, Poncelet and Abel problems. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 12(4) :1587–1633, 2013.
- [BZ19] Boris Bekker and Yuri Zarhin. Torsion points of order $2g+1$ on odd degree hyperelliptic curves of genus g , 2019.
- [DR11] Vladimir Dragović and Milena Radnović. *Poncelet porisms and beyond. Integrable billiards, hyperelliptic Jacobians and pencils of quadrics*. Birkhäuser, 2011.
- [DR19] Vladimir Dragovic and Milena Radnovic. Periodic ellipsoidal billiard trajectories and extremal polynomials. *Communications in Mathematical Physics*, 372 :183–211, 2019.
- [dSG10] Henri Paul de Saint-Gervais. *Uniformisation des surfaces de Riemann*. ENS Éditions, Lyon, 2010.
- [Gen] Quentin Gendron. Diferenciales, superficies planas y puntos de Weierstrass. En préparation.
- [GT17] Quentin Gendron and Guillaume Tahar. Différentielles à singularités prescrites. *ArXiv e-prints*, 2017.
- [Lep97] Franck Leprévost. Sur certains sous-groupes de torsion de jacobienes de courbes hyperelliptiques de genre $g \geq 1$. *Manuscr. Math.*, 92(1) :47–63, 1997.
- [McM06] Curtis McMullen. Teichmüller curves in genus two : Torsion divisors and ratios of sines. *Invent. Math.*, 165(3) :651–672, 2006.
- [MT02] Howard Masur and Serge Tabachnikov. Rational billiards and flat structures. In *Handbook of dynamical systems. Volume 1A*, pages 1015–1089. North-Holland, 2002.
- [Pak98] Fedor Pakovitch. Combinatoire des arbres planaires et arithmétique des courbes hyperelliptiques. *Ann. Inst. Fourier*, 48(2) :323–351, 1998.
- [Ser18] Jean-Pierre Serre. Distribution asymptotique des valeurs propres des endomorphismes de Frobenius [d’après Abel, Chebyshev, Robinson,...], 2018.
- [Str84] Kurt Strebel. *Quadratic differentials*, volume 5 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge*. Springer, 1984.
- [SY92] Mikhail Sodin and Peter Yuditskij. Functions least deviating from zero on closed subsets of the real axis. *Algebra Anal.*, 4(2) :1–61, 1992. traduction anglaise, *St. Petersburg Math. J.*, 4.2, p. 201–249, 1993.
- [Tch54] Pafnutii Tchebychev. Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes. *Mém. Acad. Sci. Pétersb*, 7 :539–568, 08 1854.
- [Zar19] Yuri Zarhin. Division by 2 on odd-degree hyperelliptic curves and their Jacobians. *Izv. Math.*, 83(3) :501–520, 2019.
- [Zor06] Anton Zorich. Flat surfaces. In *Frontiers in number theory, physics, and geometry. I*, pages 437–583. Springer, Berlin, 2006.

Quentin Gendron
Centro de Investigación en Matemáticas,
Guanajuato, Gto.,
AP 402, CP 36000,
México
courriel : quentin.gendron@cimat.mx