

DIFFÉRENTIELLES QUADRATIQUES À SINGULARITÉS PRESCRITES

QUENTIN GENDRON AND GUILLAUME TAHAR

ABSTRACT. The local invariants of a meromorphic quadratic differential on a compact Riemann surface are the orders of zeros and poles, and the residues at the poles of even orders. The main result of this paper is that with few exceptions, every pattern of local invariants can be obtained by a quadratic differential on some Riemann surface. The exceptions are completely classified and only occur in genera zero and one. Moreover, in the case of a nonconnected stratum, we show that, with three exceptions in genus one, every invariants can be realized in each connected component of the stratum. These results are obtained using the flat metric induced by the differentials. We give an application by bounding the number of disjoint cylinders on a primitive quadratic differential.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
2. Rappels et boîte à outils	6
3. Différentielles avec un pôle impair	11
4. Différentielles à pôles pairs non doubles	13
5. Différentielles à pôles pairs	22
6. Différentielles dont les pôles sont doubles	29
7. Différentielles avec au moins quatre singularités impaires	48
8. Différentielles quadratiques en genre supérieur	49
9. Applications	66
Références	68

1. INTRODUCTION

Sur une surface de Riemann X de genre g , une *différentielle quadratique* est une section méromorphe du fibré $K_X^{\otimes 2}$, où K_X est le fibré en droites canonique de X . Localement, une différentielle quadratique s'écrit $f(z)(dz)^2$, où f est une fonction méromorphe. Une différentielle quadratique est *primitive* si elle n'est pas le carré d'une différentielle abélienne sur X . Les invariants locaux d'une différentielle quadratique ξ en un point P sont l'*ordre* de la différentielle en P et le *résidu quadratique* $\text{Res}_P^2(\xi)$, si P est un pôle d'ordre pair de ξ (voir par exemple [Str84]).

Dans cet article, nous nous proposons de répondre à un problème de type Riemann-Hilbert, consistant à déterminer sous quelles conditions une configuration d'invariants locaux est réalisable par une différentielle quadratique sur une surface de Riemann, c'est-à-dire un objet global. Le problème correspondant pour les différentielles abéliennes a été résolu dans [GT21a]. Nous nous concentrerons donc dans cet article sur le cas des différentielles quadratiques primitives. Plus précisément, nous nous proposons de répondre à la question suivante :

Étant donnés les ordres des zéros et des pôles ainsi que les résidus aux pôles, existe-il une différentielle quadratique primitive ayant ces invariants locaux ?

Date: 24 novembre 2021.

Key words and phrases. Quadratic differential, Flat surface, Strata, Residue.

Il s'agit donc de déterminer les obstructions globales. Le degré du fibré canonique est un invariant topologique, ce qui implique que la somme des ordres des zéros et des pôles d'une différentielle quadratique est égale à $4g - 4$. Notons que contrairement au cas des différentielles abéliennes, la somme des résidus des différentielles quadratiques ne s'annule pas forcément.

Jusqu'ici, les résultats d'existence les plus fins sont ceux de [MS93; Dia00] sur l'existence de différentielles quadratiques, respectivement holomorphes et méromorphes, dont les ordres des singularités sont prescrits, mais ils ne disent rien des résidus dans le cas méromorphe.

1.1. Définitions. Nous désignons par

$$\mu := (a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p; -c_1, \dots, -c_r; \underbrace{-2, \dots, -2}_s),$$

une partition de $4g - 4$ où les a_i sont des entiers supérieurs ou égaux à -1 , les b_i sont des entiers positifs pairs, les c_i sont des entiers positifs impairs supérieurs ou égaux à 3 et qui contient s fois -2 . Afin de simplifier les notations, si un ordre a apparaît k fois, on le notera (a^k) . Par exemple, la partition μ sera notée $(a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p; -c_1, \dots, -c_r; (-2^s))$. Plus généralement, une suite (a, \dots, a) de k nombres complexes tous identiques pourra être notée (a^k) .

Nous appelons *zéro* d'une différentielle quadratique une singularité d'ordre supérieure ou égale à -1 et *pôle* une singularité d'ordre inférieur ou égal à -2 . Enfin, nous posons $n = p + i$ où i désigne le nombre de zéros d'ordre impair et p celui des zéros d'ordre pair. Dans l'ordre de la séquence (a_1, \dots, a_n) , les ordres impairs seront toujours écrits avant les pairs. Ainsi, (a_1, \dots, a_i) désigne les zéros d'ordres impairs.

La *strate primitive* $\Omega^2 \mathcal{M}_g(\mu)$ paramètre les paires (X, ξ) formées d'une surface de Riemann X de genre g et d'une différentielle quadratique *primitive* ξ de type μ sur X . Les strates primitives (non vides) de différentielles quadratiques sont des variétés orbifoldes de dimension $2g - 2 + n + p + r + s$.

Rappelons maintenant que pour une différentielle ξ et un point P de X , il existe une coordonnée z au voisinage de P telle que ξ s'écrit

$$\begin{cases} z^m (dz)^2 & \text{si } m > -2 \text{ ou } m \text{ impair,} \\ \left(\frac{r}{z}\right)^2 (dz)^2 & \text{avec } r \in \mathbf{C}^* \text{ si } m = -2, \\ \left(z^{m/2} + \frac{r}{z}\right)^2 (dz)^2 & \text{avec } r \in \mathbf{C} \text{ si } m < -2 \text{ et } m \text{ pair.} \end{cases} \quad (1.1)$$

Le *résidu quadratique* $\text{Res}_P^2(\xi)$ de ξ en P est le carré de r . Ainsi, le résidu quadratique est toujours non nul dans le cas des pôles doubles. Toutefois il n'existe pas de théorème des résidus pour les différentielles quadratiques. Ainsi, étant donnée une strate $\Omega^2 \mathcal{M}_g(\mu)$, nous définissons l'*espace résiduel de type μ* par

$$\mathcal{R}_g^2(\mu) := \mathbf{C}^p \times (\mathbf{C}^*)^s. \quad (1.2)$$

Cet espace paramètre les configurations de résidus quadratiques que peut prendre une différentielle de $\Omega^2 \mathcal{M}_g(\mu)$. Afin d'obtenir des constructions plus agréables via la géométrie plate, nous multiplions le résidu quadratique par $-4\pi^2$, que nous continuerons d'appeler *résidu quadratique* ou plus simplement *résidu*. Cela n'a pas d'incidence sur l'énoncé des résultats, mais rend les preuves plus agréables.

L'*application résiduelle* est donnée par

$$\mathfrak{R}_g^2(\mu) : \Omega^2 \mathcal{M}_g(\mu) \rightarrow \mathcal{R}_g^2(\mu) : (X, \xi) \mapsto (\text{Res}_{P_i}^2(\xi)), \quad (1.3)$$

où les P_i sont les pôles d'ordre pair de ξ . Insistons sur le fait que par définition, les différentielles quadratiques de $\Omega^2 \mathcal{M}_g(\mu)$ sont *primitives*. Résoudre la question centrale de cet article revient à déterminer l'image de cette application pour chaque strate et chaque composante connexe de la strate quand celle-ci n'est pas connexe.

1.2. Genre supérieur ou égal à un. Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer les résultats centraux de cet article. Rappelons que $\Omega^2\mathcal{M}_g(\mu)$ paramètre les différentielles quadratiques *primitive* de type μ . En général, les strates de différentielles quadratiques méromorphes ne sont pas connexes et leur composantes connexes ont été classifiées par [CG21] dans le cas où la différentielle possède des pôles d'ordres ≤ -2 . Les deux résultats suivants décrivent l'image de la restriction de l'application résiduelle à chaque composante connexe pour les strates de différentielles sur les surfaces de Riemann de genre ≥ 1 .

Dans le cas des différentielles quadratiques de genre supérieur ou égal à deux on a le résultat suivant.

Théorème 1.1. *Pour tout $g \geq 2$ la restriction à chaque composante connexe de la strate $\Omega^2\mathcal{M}_g(\mu)$ de l'application résiduelle $\mathfrak{R}_g^2(\mu): \Omega^2\mathcal{M}_g(\mu) \rightarrow \mathcal{R}_g^2(\mu)$ est surjective.*

Le cas des strates de genre 1 est plus subtil. En effet, il existe des composantes où la restriction de l'application résiduelle n'est pas surjective. Rappelons, voir la section 8.1, que les composantes connexes sont classifiées par le nombre de rotation ρ . On note $\Omega^2\mathcal{M}_1^\rho(\mu)$ la composante connexe de nombre de rotation ρ de la strate $\Omega^2\mathcal{M}_1(\mu)$.

Théorème 1.2. *Soit μ un partition de 0 avec au moins un élément inférieur ou égal à -2 .*

- i) Si $\mu = (4a; (-4^a))$ ou $\mu = (2a - 1, 2a + 1; (-4^a))$ pour $a \in \mathbf{N}^*$, alors l'image de $\mathfrak{R}_1^2(\mu)$ est égale à $\mathcal{R}_1^2(\mu) \setminus \{(0, \dots, 0)\}$.*
- ii) Si $\mu = (2s; (-2^s))$ ou $\mu = (s - 1, s + 1; (-2^s))$ avec s un entier pair non nul, alors l'image de $\mathfrak{R}_1^2(\mu)$ est égale à $\mathcal{R}_1^2(\mu) \setminus \mathbf{C}^* \cdot (1, \dots, 1)$.*
- iii) L'image de l'application résiduelle des composantes $\Omega^2\mathcal{M}_1^1(6; -6)$, $\Omega^2\mathcal{M}_1^1(3, 3; -6)$ et $\Omega^2\mathcal{M}_1^3(12; -6, -6)$ est le complémentaire de l'origine.*
- iv) Dans tout autre cas, l'application résiduelle $\mathfrak{R}_1^{2-\rho}(\mu)$ est surjective.*

1.3. Différentielles quadratiques sur la sphère de Riemann. Le cas des différentielles quadratiques sur la sphère de Riemann présente de nombreuses difficultés. En particulier, il existe des strates pour lesquelles le complémentaire de l'image de l'application résiduelle est de dimension complexe 1 ou 2.

Rappelons qu'étant donné une partition μ de -4 , l'espace $\Omega^2\mathcal{M}_0(\mu)$ paramètre les différentielles quadratiques primitives de type μ . On commence par remarquer (cf lemme 2.1) que ces strates sont non vides si et seulement si μ contient un nombre impair. De plus, le nombre de singularités impaires est pair.

Le cas des strates paramétrant des différentielles quadratiques ayant au moins quatre singularités impaires est donné par le théorème suivant.

Théorème 1.3. *L'application résiduelle d'une strate de genre zéro paramétrisant des différentielles quadratiques avec au moins 4 singularités impaires est surjective.*

Le cas des strates qui possèdent 2 singularités impaires est plus subtil et les résultats suivants donnent la réponse complète suivant la partition considérée.

Nous commençons pour décrire le cas des strates où les deux singularités impaires sont des pôles.

Théorème 1.4. *Soit $\mu = (a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p; -c_1, -c_2; (-2^s))$ une partition de -4 telle que $c_1, c_2 \geq 3$. L'application résiduelle de $\Omega^2\mathcal{M}_0(\mu)$ est surjective.*

Nous décrivons maintenant le cas où l'une des deux singularités d'ordres impaires est un pôle et l'autre est un zéro.

Théorème 1.5. *Soit $\Omega^2\mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p; -c; (-2^s))$ une strate de genre zéro avec un unique zéro a_1 impair et $c \geq 3$. L'image de l'application résiduelle de cette strate est :*

- i) l'espace résiduel privé de l'origine $\mathcal{R}_0^2(\mu) \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ si la somme des ordres des zéros d'ordres pairs est strictement inférieure à $2p$,*

ii) l'espace résiduel $\mathcal{R}_0^2(\mu)$ sinon.

Nous donnons maintenant la description de l'application résiduelle lorsque les deux singularités d'ordres impairs sont des zéros. Si les différentielles possèdent des pôles doubles et des pôles d'ordres inférieurs, on a la description suivante.

Théorème 1.6. *L'application résiduelle des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p; (-2^s))$ avec $p \neq 0$, $s \neq 0$ et $i = 2$ zéros impairs est surjective sauf dans les cas exceptionnels suivants :*

- i) *L'image de $\mathcal{R}_0^2(2s' - 1; 2s' + 1; -4; (-2^{2s'}))$ avec $s' \geq 1$ est $\mathcal{R}_0^2(\mu) \setminus \mathbb{C}^* \cdot (0; 1, \dots, 1)$.*
- ii) *L'image de $\mathcal{R}_0^2(2a - 1; 2a + 1; (-4^a); (-2^2))$ avec $a \geq 0$ est $\mathcal{R}_0^2(\mu) \setminus \mathbb{C}^* \cdot (0, \dots, 0; 1, 1)$.*
- iii) *L'image de $\mathcal{R}_0^2(2s' + 1; 2s' + 1; -4; (-2^{2s'+1}))$ avec $s' \geq 0$ est $\mathcal{R}_0^2(\mu) \setminus \mathbb{C}^* \cdot (1; 1, \dots, 1)$.*
- iv) *L'image de $\mathcal{R}_0^2(2a - 1, 2a - 1; (-4^a); -2)$ avec $a \geq 1$ est $\mathcal{R}_0^2(\mu) \setminus \mathbb{C}^* \cdot (1, 0, \dots, 0; 1)$.*

Dans le cas des différentielles dont tous les pôles sont d'ordres pairs inférieurs ou égaux à -4 , l'image de l'application résiduelle est donné par le résultat suivant.

Théorème 1.7. *Soit $\mu = (a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p)$ une partition de -4 avec $i = 2$ zéros d'ordres impairs. Notons $\tilde{a}_p = \sum_{i=3}^n a_i$ la somme des zéros d'ordres pairs.*

- i) *L'image de l'application résiduelle des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2p+b-5, 2p+b-5; -b, -b-2, (-4^{p-2}))$ et $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2p+b-7, 2p+b-5; -b, -b, (-4^{p-2}))$ avec $p \geq 2$ et $b \geq 4$ pair est égale à $\mathcal{R}_0^2(\mu) \setminus \mathbb{C} \cdot (1, 1, (0^{p-2}))$.*
- ii) *L'image de l'application résiduelle des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(\mu)$ telles que $\tilde{a}_p < 2p$ (non considérées dans le point i)) est le complémentaire de l'origine $\mathcal{R}_0^2(\mu) \setminus \{(0, \dots, 0)\}$.*
- iii) *L'image de l'application résiduelle des strates avec $\tilde{a}_p \geq 2p$ est l'espace résiduel.*

Enfin nous donnons la description de l'image par l'application résiduelle des strates dont tous les pôles sont d'ordre -2 . Dans ces strates, le concept suivant est important pour décrire l'application résiduelle.

Définition 1.8. Des nombres R_1, R_2, R_3 sont *triangulaires* s'il existe des racines carrées r_1, r_2, r_3 de ces nombres telles que $r_1 + r_2 + r_3 = 0$.

La description de l'image de l'application résiduelle des strates dont tous les pôles sont doubles et qui possède deux zéros d'ordres impairs est donnée dans le résultat suivant.

Théorème 1.9. *L'application résiduelle de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; (-2^s))$ avec $i = 2$ zéros d'ordres impairs a_1, a_2 est surjective sauf dans les quatre cas suivants.*

- i) *L'image de l'application résiduelle des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2s - 1, 2s + 1; (-2^{2s'+2}))$ ne contient pas les configurations de la forme (R, \dots, R, R', R') pour tout $R, R' \in \mathbb{C}^*$.*
- ii) *L'image de l'application résiduelle des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2s' - 1, 2s' - 1; (-2^{2s'+1}))$ ne contient pas les configurations de la forme $(R_1, R_2, R_3, \dots, R_3)$ où les R_i sont triangulaires.*
- iii) *L'image de l'application résiduelle des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; (-2^s))$ ne contient pas les configurations de la forme $\lambda(r_1^2, \dots, r_s^2)$ où $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et r_1, \dots, r_n entiers premiers entre eux avec $\sum r_i$ impair telle que*

$$\sum r_i < \max(a_1, a_2) + 2. \quad (1.4)$$

- iv) *L'image de l'application résiduelle des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; (-2^s))$ ne contient pas les configurations de la forme $\lambda(r_1^2, \dots, r_s^2)$ où $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et r_1, \dots, r_n entiers premiers entre eux avec $\sum r_i$ pair telle que*

$$\sum r_i < a_1 + a_2 + 4. \quad (1.5)$$

1.4. Applications. Nous donnons deux applications de nos résultats. Tout d'abord nous reprovons que les strates de différentielles quadratiques d'aire finie sont non vides, à l'exception de quelques cas. Ensuite nous donnons la borne optimale du nombre de cylindres disjoints dans une différentielle quadratique d'une strate donnée.

Différentielles quadratiques d'aire finie. Le problème de savoir si les strates de différentielles quadratiques primitives $\Omega^2\mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n)$ sont vides a été résolu par [MS93]. Le résultat est le suivant.

Proposition 1.10. *Soit $\mu = (a_1, \dots, a_n)$ une partition de $4g - 4$ dont tous les éléments sont supérieurs ou égaux à -1 . La strate primitive $\Omega^2\mathcal{M}_g(\mu)$ est vide si et seulement si*

- i) $g = 1$ et $\mu = (-1, 1)$ ou $\mu = \emptyset$;
- ii) $g = 2$ et $\mu = (4)$ ou $\mu = (1, 3)$.

Nous donnons une nouvelle preuve de ce résultat dans la section 9.1.

Cylindres. Naveh a montré dans [Nav08] que le nombre maximal de cylindres disjoints dans une différentielle abélienne holomorphe de la strate $\Omega\mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n)$ est $g + n - 1$ et que cette borne est toujours atteinte. Nous généralisons ce résultat au cas des différentielles quadratiques. Rappelons que i est le nombre de zéros impairs et pôles simples, et p celui de zéros pairs.

Proposition 1.11. *Une différentielle de $\Omega^2\mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n)$ possède au plus $g + p + \frac{i}{2} - 1$ cylindres disjoints. De plus, cette borne est atteinte par une différentielle dans chaque strate.*

1.5. Liens avec d'autres travaux. Cet article est le deuxième d'une série de trois articles consacrés à l'étude des obstructions globales à l'existence de différentielles dont les invariants locaux sont prescrits. Ce travail suit l'article [GT21a] relatif aux différentielles abéliennes et sera suivi du troisième article [GT22] traitant les cas des différentielles d'ordre supérieur (différentielles cubiques et au-delà). Les obstructions présentes dans ces trois cas étant de natures différentes, un traitement séparé est nécessaire.

Le travail [Son+20] associe aux différentielles de Strebel des métriques sphériques à singularités coniques avec une monodromie spéciale. Les angles coniques de ces métriques sont déterminés par les invariants locaux de la différentielle quadratique. Nos résultats nous permettront de caractériser dans [GT21b] les distributions d'angles qui peuvent être réalisées par une telle métrique sphérique.

1.6. Organisation de cet article. Le schéma de la preuve de ces théorèmes est le suivant. Dans un premier temps nous utilisons la correspondance entre les différentielles quadratiques et certaines classes de surfaces plates introduites par [Str84]. Cette correspondance nous permet de construire explicitement des différentielles ayant les propriétés souhaitées lorsque le genre et le nombre de singularités sont petits.

Dans un second temps, nous déduisons de ces résultats les autres cas grâce à deux opérations introduites par [Lan08] : l'éclatement d'une singularité et la couture d'anse. La première de ces opérations permet d'augmenter le nombre de singularités sans changer le genre d'une différentielle. La seconde préserve le nombre de singularités mais augmente le genre de la surface sous-jacente.

Enfin, dans les cas où l'application résiduelle n'est pas surjective, nous développons des méthodes ad hoc afin de montrer la non-existence de différentielles ayant certains invariants locaux.

L'article s'organise comme suit. Dans la section 2 nous faisons les rappels nécessaires sur les représentations plates des différentielles quadratiques et sur les deux opérations précédemment citées. De plus, nous introduisons dans cette section les briques élémentaires

qui nous permettrons de construire les différentielles avec les propriétés souhaitées. Les sections 3 jusqu'à 7 sont dédiées au cas des strates de genre 0. Dans les sections 3 jusqu'à 6 nous supposons que les strates paramètrent des différentielles avec deux singularités impaires. Plus précisément, la section 3 est dédiée au cas des différentielles avec au moins un pôle d'ordre impair, montrant le théorème 1.5. La section 4 est dédiée au théorème 1.7 sur les différentielles dont les pôles sont d'ordre pair non doubles. La section 5 traite le théorème 1.6 des différentielles avec des pôles d'ordre pair et des pôles doubles. La section 6 donne la preuve du théorème 1.9 traitant des différentielles dont tous les pôles sont doubles. La section 7 termine la preuve de la classification en genre 0 en montrant le théorème 1.3 sur les strates avec au moins 4 singularités impaires. La section 8 est dédiée aux cas des différentielles quadratiques en genre supérieur ou égal à 1. Dans cette section, nous montrons les théorèmes 1.1 et 1.2. Pour finir, nous donnons les preuves des applications énoncées dans l'introduction dans la section 9.

1.7. Remerciements. Nous remercions Corentin Boissy pour des discussions enrichissantes liées à cette série d'articles. Le premier auteur remercie l'*Institut für algebraische Geometrie* de la *Leibniz Universität Hannover* et le *Centro de Ciencias Matemáticas* de la *Universidad Nacional Autónoma de México* où il a élaboré une grande partie de ce texte. Le logiciel *GeoGebra* a procuré une aide substantielle au premier auteur. Le deuxième auteur est financé par l'Israel Science Foundation (grant No. 1167/17) et le European Research Council (ERC) dans le cadre du European Union Horizon 2020 research and innovation programme (grant agreement No. 802107).

2. RAPPELS ET BOÎTE À OUTILS

Dans cette section, nous introduisons les objets et les opérations de base pour nos constructions. Nous commençons par quelques rappels sur les différentielles quadratiques dans la section 2.1. Ensuite nous introduisons dans la section 2.2 les briques élémentaires de nos surfaces plates. Nous poursuivons par un rappel sur les différentielles entrelacées et les opérations de scindage de zéro et de couture d'anse dans la section 2.3. Enfin, nous discuterons un cas spécial de surfaces plates dans la section 2.4.

2.1. Différentielles quadratiques méromorphes. Dans ce paragraphe, nous rappelons des résultats élémentaires sur les différentielles quadratiques méromorphes et leur relation avec les surfaces plates. Plus de détails peuvent être trouvés dans [Bai+19] et [CG21].

Soit X une surface de Riemann de genre g et ω une section méromorphe du fibré canonique K_X . On notera Z les zéros et P les pôles de ω . L'intégration de ω sur $X \setminus P$ induit une structure plate sur $X \setminus P$. Chaque zéro de ω d'ordre a correspond à une singularité conique d'angle $2(a + 1)\pi$ de la structure plate. Les pôles simples de ω correspondent à des demi-cylindres infini. Les pôles d'ordre $-b \leq -2$ correspondent à un revêtement de degré $b - 1$ du plan dans lequel on a éventuellement fait une entaille correspondant au résidu. Inversement, une surface plate obtenue en attachant par translation un nombre fini de demi-cylindres infinis, des revêtements d'ordre $b - 1$ du plan entaillé et des polygones correspond à une différentielle abélienne méromorphe sur une surface de Riemann.

Une théorie similaire a été développée dans le cas des sections méromorphes ξ de K_X^2 . En effet, on peut passer au revêtement canonique $\pi: \widehat{X} \rightarrow X$ et choisir une racine carrée $\widehat{\omega}$ de $\pi^*\xi$ sur \widehat{X} . L'intégration de $\widehat{\omega}$ le long d'un chemin de \widehat{X} nous fournit une structure plate sur \widehat{X} . La surface plate ainsi obtenue possède une symétrie cyclique d'ordre 2 provenant de la structure de revêtement. Le quotient de cette surface par ce groupe est une surface plate où l'on autorise les identifications par des translations et rotations d'angle π . On dit qu'une différentielle quadratique est *primitive* si de manière équivalente son revêtement canonique est connexe, ou le groupe d'holonomie est non trivial. Les pôles d'ordre -2 correspondent à des demi-cylindres infinis et les pôles d'ordre $-b < -2$ à un revêtement d'ordre $b - 2$ d'un

domaine angulaire d'angle π . Les pôles simples et zéros d'ordres $a \geq -1$ correspondent aux singularités coniques d'angle $(a + 2)\pi$.

Si une différentielle quadratique ξ est le carré d'une différentielle holomorphe ω , on a pour tout pôle P

$$\text{Res}_P^2(\xi) = (\text{Res}_P(\omega))^2. \quad (2.1)$$

En genre zéro, toutes les strates sont connexes. Il est facile de caractériser les strates qui ne contiennent que des différentielles quadratiques primitives.

Lemme 2.1. *Soient $\mu = (m_1, \dots, m_t)$ un t -uplet de nombres pairs m_i tel que $\sum m_i = -4$. Toutes les différentielles de type μ sont le carré d'une différentielle abélienne de $\Omega\mathcal{M}_0(\mu/2)$.*

Démonstration. Une différentielle ξ sur \mathbb{P}^1 de type μ est donnée par la formule

$$\xi = \prod_{i=1}^t (z - z_i)^{m_i} dz^2 = \left(\prod_{i=1}^t (z - z_i)^{m_i/2} dz \right)^2.$$

□

2.2. Briques élémentaires. Dans ce paragraphe, nous introduisons des surfaces plates à bord qui nous serviront de briques pour construire les différentielles quadratiques ayant les propriétés locales souhaitées.

Étant donnés des vecteurs (v_1, \dots, v_l) dans $(\mathbf{C}^*)^l$. Nous considérons la ligne brisée L dans \mathbf{C} donnée par la concaténation d'une demi-droite correspondant à \mathbf{R}_- , des v_i pour i croissant et d'une demi-droite correspondant à \mathbf{R}_+ . Nous supposons que les v_i sont tels que L ne possède pas de points d'auto-intersection. Nous donnerons une condition suffisante pour que cela soit possible dans le lemme 2.3.

Le *domaine basique positif* (resp. *négatif*) $D^+(v_1, \dots, v_l)$ (resp. $D^-(v_1, \dots, v_l)$) est l'adhérence de la composante connexe de $\mathbf{C} \setminus L$ contenant les nombres complexes au dessus (resp. en dessous) de L . Étant donné un domaine positif $D^+(v_1, \dots, v_l)$ et un négatif $D^-(w_1, \dots, w_r)$, on construit le *domaine basique ouvert à gauche* (resp. *droite*) $D_g(v_1, \dots, v_l; w_1, \dots, w_r)$ (resp. $D_d(v_1, \dots, v_l; w_1, \dots, w_r)$) en collant par translation les deux demi-droites correspondant à \mathbf{R}_+ (resp. \mathbf{R}_-).

On se donne $b \geq 4$ pair et $\tau \in \{1, \dots, \frac{b}{2} - 1\}$. Soient $(v_1, \dots, v_l; w_1, \dots, w_r)$ des vecteurs de \mathbf{C}^* tels que la partie réelle de leurs sommes est positive et que l'argument (pris dans $]-\pi, \pi[$) des v_i est décroissant, des w_j est croissant. La partie polaire d'ordre b et de type τ associée à $(v_1, \dots, v_l; w_1, \dots, w_r)$ est la surface plate à bord obtenue de la façon suivante. Prenons l'union disjointe de $\tau - 1$ domaines basiques ouverts à gauche associé à la suite vide, $\frac{b}{2} - \tau - 1$ domaines basiques ouverts à droite associé à la suite vide. Enfin prenons le domaine positif associé aux v_i et le domaine négatif associé aux w_j . On colle alors par translation la demi-droite inférieure du i -ième domaine polaire ouvert à gauche à la demi-droite supérieure du $(i + 1)$ -ième. La demi-droite inférieure du domaine $\tau - 1$ est identifiée à la demi-droite de gauche du domaine positif. La demi-droite de gauche du domaine négatif est identifiée à la positive du premier domaine ouvert à gauche. On procède de même à droite. La figure 1 illustre cette construction.

Si $\sum v_i = \sum w_j$ nous dirons que cette partie polaire est *triviale*. Dans le cas contraire, nous dirons que la partie polaire est *non triviale*. Sur la figure 2, le dessin de gauche illustre une partie polaire non triviale.

On se donne maintenant des vecteurs (v_1, \dots, v_l) avec $l \geq 1$ tels que la concaténation V de ces vecteurs dans cet ordre n'a pas de points d'auto-intersection. De plus, on suppose qu'il existe deux demi-droites parallèles L_D et L_F de vecteur directeur \vec{l} , issues respectivement du point de départ D et final F de V , ne rencontrant pas V et telles que (\vec{DF}, \vec{l}) est une base positive de \mathbf{R}^2 . On définit la partie polaire $C(v_1, \dots, v_l)$ d'ordre 2 associé aux v_i comme le quotient du sous-ensemble de \mathbf{C} entre V et les demi-droites L_D et L_F par l'identification

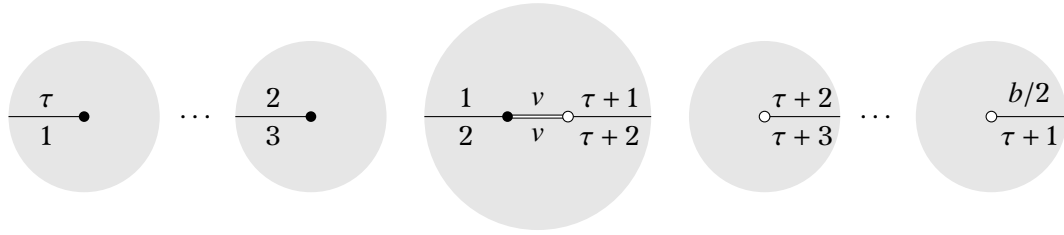


FIGURE 1. Une partie polaire d'ordre b de type τ associée à $(v; v)$. Les demi-droites dont les labels coïncident sont identifiés par translation

de L_D à L_F par translation. Le résidu du pôle simple correspondant est donné par la somme $F - D$ des v_i . Une partie polaire d'ordre 2 est donnée à droite de la figure 2.

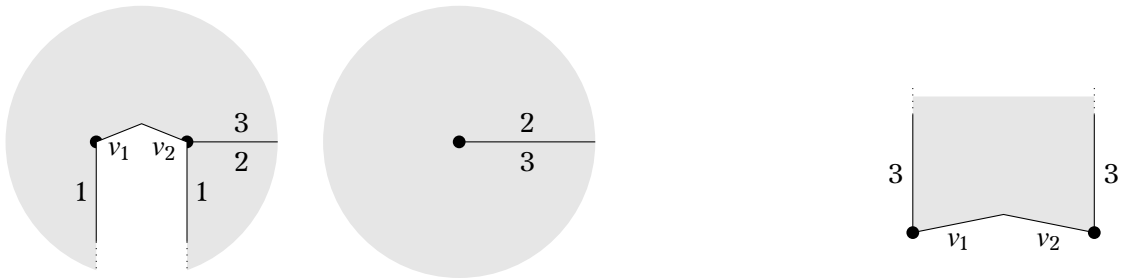


FIGURE 2. Une partie polaire non triviale associée à $(v_1, v_2; \emptyset)$ d'ordre 6 (de type 1) à gauche et d'ordre 2 à droite

Nous traitons maintenant le cas des pôles d'ordres impairs. Soit $c = 2\ell + 1$ avec $\ell \geq 1$. On se donne des vecteurs v_i de \mathbf{C}^* de partie réelle positive. La partie polaire d'ordre c associée aux $(v_1, \dots, v_\ell; \emptyset)$ est donnée par la construction suivante. Nous considérons domaine basique positif associé à $(v_1, \dots, v_\ell; \emptyset)$. Ensuite nous prenons $\ell - 1$ domaines basiques ouverts dans la direction de L_1 associés à la suite vide. Puis nous identifions les demi-droites cycliquement par translation, à l'exception du dernier qui est identifié par translation et rotation d'angle π à la demi-droite L_2 . Cette construction est illustrée dans la figure 3.

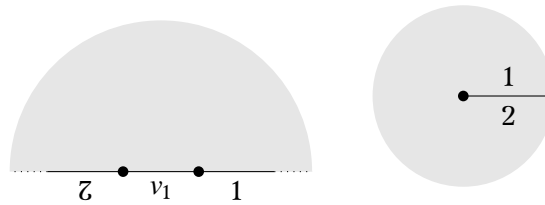


FIGURE 3. La partie polaire associée à $(v_1; \emptyset)$ d'ordre 3

Pour simplifier certaines constructions, il est utile de considérer la partie polaire d'ordre c associée à $(\emptyset; v_1, \dots, v_\ell)$. Elle est définie de manière similaire à la partie polaire précédente en considérant le domaine basique négatif associé à ces vecteurs.

L'importance de ces constructions est résumé dans le lemme suivant.

Lemme 2.2. Soient $(v_1, \dots, v_\ell; w_1, \dots, w_\ell)$ des nombres complexes, le pôle associé à la partie polaire d'ordre b pair et de type τ associée à $(v_1, \dots, v_\ell; w_1, \dots, w_\ell)$ est d'ordre $-b$ et de résidu quadratique égal à $(\sum_{i=1}^{\ell} v_i - \sum_{j=1}^{\ell} w_j)^2$.

Soit (v_1, \dots, v_l) avec $l \geq 1$, le pôle associé au domaine polaire d'ordre 1 associé à v_i est d'ordre -2 et possède un résidu égal à $(\sum_{i=1}^l v_i)^2$.

Le pôle associé à un domaine polaire d'ordre $c \geq 3$ impair est d'ordre $-c$.

Nous donnons maintenant une condition suffisante pour que la ligne brisée décrite aux paragraphes précédents soit sans points d'intersection.

Lemme 2.3. *Si les v_i sont soit de partie réel strictement positive, soit de partie réelle nulle et de partie imaginaire strictement positive, alors, quitte à permuter les v_i , alors la concaténation des v_i avec les demi-droites horizontales L_1 et L_2 est sans point d'intersection.*

Démonstration. Quitte à permuter les v_i , on peut supposer que les arguments des vecteurs v_i , appartenant à l'ensemble $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ sont décroissants. Notons que pour tout $\theta \in]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[$ la demi-droite de pente θ partant du point initial de la concaténation n'a pas d'autres points d'intersection avec celle-ci. On a le même résultat pour les demi-droites d'angle ϕ partant du point final pour tout $\phi \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Cela implique que l'on peut trouver des droites L_1 et L_2 sans point d'intersection avec le reste de la construction qui forment n'importe quel angle strictement compris entre 0 et 2π , en particulier avec les droites horizontales. \square

2.3. Différentielles quadratiques entrelacées, éclatement de zéros et couture d'anses. Dans ce paragraphe, nous rappelons dans le cas quadratique certains cas particuliers des résultats de [Bai+19] sur les k -différentielles entrelacées. Cela nous permet de rappeler les constructions de l'éclatement des zéros et de la couture d'anse discutée en détail dans [CG21].

Tout d'abord, nous rappelons la définition d'une différentielle quadratique entrelacée. Étant donnée une partition $\mu := (m_1, \dots, m_r)$ telle que $\sum_{i=1}^r m_i = 4g - 4$, une différentielle quadratique entrelacée η de type μ sur une courbe stable n -marquée (X, z_1, \dots, z_r) est une collection de différentielles quadratiques non nulles η_v sur les composantes irréductibles X_v de X satisfaisant aux conditions suivantes.

(0) (**Annulation comme prescrit**) Chaque différentielle η_v est méromorphe et le support de son diviseur est inclus dans l'ensemble des nœuds et des points marqués de X_v . De plus, si un point marqué z_i se trouve sur X_v , alors $\text{ord}_{z_i} \eta_v = m_i$.

(1) (**Ordres assortis**) Pour chaque nœud de X qui identifie $q_1 \in X_{v_1}$ à $q_2 \in X_{v_2}$,

$$\text{ord}_{q_1} \eta_{v_1} + \text{ord}_{q_2} \eta_{v_2} = -4.$$

(2) (**Résidus assortis aux pôles doubles**) Si a un nœud de X qui identifie $q_1 \in X_{v_1}$ avec $q_2 \in X_{v_2}$ on a $\text{ord}_{q_1} \eta_{v_1} = \text{ord}_{q_2} \eta_{v_2} = -2$, alors

$$\text{Res}_{q_1}^2 \eta_{v_1} = \text{Res}_{q_2}^2 \eta_{v_2}.$$

Ce n'est que pour des cas très particuliers que nous aurons besoin de savoir quand une différentielle entrelacée est lissable. Nous rappelons ici uniquement les cas qui nous intéressent. Le premier cas est celui où les différentielles quadratiques ont un pôle double à tous les nœuds.

Lemme 2.4. *Soit $\eta = \{\eta_v\}$ une différentielle quadratique entrelacée. Si l'ordre des différentielles η_v aux nœuds est -2 , alors η est lissable sans modifier les invariants locaux aux points lisses.*

Maintenant nous regardons le cas des différentielles entrelacées à deux composantes.

Lemme 2.5. *Supposons que X possède exactement deux composantes X_1 et X_2 reliées par un unique nœud qui identifie $q_1 \in X_1$ à $q_2 \in X_2$. Si $\text{ord}_{q_1} \eta_1 > -2 > \text{ord}_{q_2} \eta_2$, alors la différentielle quadratique entrelacée est lissable si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée.*

i) $\text{Res}_{q_2}^2 \eta_2 = 0$

ii) η_1 n'est pas le carré d'une différentielle abélienne holomorphe.

De plus, si $i)$ est satisfait ou η_1 n'est pas le carré d'une différentielle abélienne méromorphe, alors il existe un lissage qui ne modifie pas les résidus de η_1 .

Remarquons que la deuxième partie du lemme n'est pas explicitement prouvée dans [Bai+19]. Toutefois, cela peut se montrer sans problèmes en combinant la preuve du théorème 1.5 et le lemme 4.4 de [Bai+19].

Nous donnons maintenant deux applications cruciales du lemme 2.5.

Proposition 2.6 (Éclatement d'un zéro). *Soient (X, ξ) une différentielle quadratique de type μ et $z_0 \in X$ un zéro d'ordre $a_0 \geq -1$ de ξ . Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_t)$ un t -uplet d'entiers supérieurs où égaux à -1 tel que $\sum_i \alpha_i = a_0$.*

Il existe une opération sur (X, ξ) en z_0 qui produit une différentielle quadratique (X', ξ') de type $(\alpha_0, \dots, \alpha_t, \mu \setminus \{a_0\})$ et qui ne modifie pas les résidus de ξ si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée.

- i) ξ n'est pas le carré d'une différentielle abélienne (méromorphe).*
- ii) Il existe une différentielle quadratique de genre zéro et de type $(\alpha_1, \dots, \alpha_t; -a_0 - 4)$ dont le résidu au pôle d'ordre $-a_0 - 4$ est nul.*

De plus, si $\xi = \omega^2$ avec ω une différentielle abélienne méromorphe, alors la différentielle ξ' est primitive si et seulement si au moins un α_i est impair.

Démonstration. Partons d'une différentielle quadratique (X, ξ) . On forme une différentielle entrelacée en attachant au point z_0 d'ordre a_0 une droite projective avec une différentielle de type $(\alpha_1, \dots, \alpha_t; -a_0 - 4)$. Le résultat est alors une conséquence directe du lemme 2.5. \square

La seconde construction nous permettra en particulier de faire une récurrence sur le genre des surfaces de Riemann.

Proposition 2.7 (Couture d'anse). *Soient (X, ξ) une différentielle quadratique primitive dans la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_g(\mu)$ et $z_0 \in X$ un zéro d'ordre a_0 de ξ . Il existe une opération locale à z_0 qui produit une différentielle (X', ξ') dans la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_{g+1}(a_0 + 2k, \mu \setminus \{a_0\})$.*

Démonstration. Partons d'une différentielle quadratique (X, ξ) . On forme une différentielle entrelacée en attachant au point z_0 une courbe elliptique avec une différentielle de type $(a_0 + 2k; -a_0 - 2k)$. Le lemme 2.5 permet de conclure. \square

2.4. Différentielles à liens-selles horizontaux. Pour certaines différentielles, beaucoup de problèmes géométriques se simplifient en des problèmes combinatoires. Cela nous permettra d'établir des obstructions en nous ramenant à ces objets.

Notons tout d'abord que l'application résiduelle est équivariante pour l'action de $GL^+(2, \mathbb{R})$ sur les strates de différentielles quadratiques.

Le lemme 2.2 de [Tah18] établit le résultat suivant.

Proposition 2.8. *Dans une strate donnée de différentielles quadratiques d'aire infinie, chaque adhérence de $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbite contient une surface dont tous les liens-selles sont horizontaux.*

Dans une telle surface S ayant n zéros (et pôles simples) et \tilde{p} pôles d'ordre au moins deux, le graphe des liens-selles (tous disjoints car tous horizontaux) découpe S en \tilde{p} domaines polaires (disques topologiques avec un des \tilde{p} pôle à l'intérieur) reliés par les liens-selles qui sont alors nécessairement au nombre de $2g + n + \tilde{p} - 2$ (voir la section 4 de [Tah18] pour plus de détails). De plus, les angles entre les liens-selles sont des multiples entiers de π .

En coupant le long de ces liens-selles, nous obtenons \tilde{p} domaines polaires. Le *graphe d'incidence* d'une telle surface est le graphe dont les sommets sont les domaines polaires et deux sommets sont reliés par autant d'arêtes qu'il y a de liens-selles séparant ces deux domaines polaires. De plus, le *graphe d'incidence simplifié* est obtenu en enlevant tous les sommets de valence 2 au graphe d'incidence. Les sommets du graphe d'incidence qui sont de valence supérieure ou égale à 3 sont dits *spéciaux*.

3. DIFFÉRENTIELLES AVEC UN PÔLE IMPAIR

Dans cette section nous considérons le cas des différentielles de genre zéro où la partition possède au moins un pôle d'ordre impair. Nous traitons dans la section 3.1 le cas de l'origine et dans la section 3.2 le complémentaire de l'origine.

3.1. Le cas du résidu nul. Lorsque la partition compte un unique pôle d'ordre impair et un unique zéro d'ordre impair, il y a une condition nécessaire non triviale pour que l'origine soit dans l'image de l'application résiduelle de la strate.

Lemme 3.1. *Considérons la partition $\mu = (a_1, 2l_2, \dots, 2l_n; -b_1, \dots, -b_p; -c)$. Si $\sum_{i=1}^n l_i < p$, alors l'application résiduelle $\mathfrak{R}_0^2(\mu)$ ne contient pas $\{(0, \dots, 0)\}$.*

Démonstration. Étant donnée une différentielle de la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(\mu)$ dont tous les résidus sont nuls, le revêtement canonique définit une différentielle abélienne méromorphe $(\widehat{X}, \widehat{\omega})$. D'après les résultats de la section 2.1 de [Bai+19], le revêtement est uniquement ramifié au zéro d'ordre a_1 et au pôle d'ordre c . Donc la surface \widehat{X} est une sphère de Riemann. De plus la 1-forme $\widehat{\omega}$ possède deux zéros d'ordres l_i pour chaque $i \geq 2$, un zéro d'ordre $a_1 + 1$, deux pôles d'ordres $-b_j/2$ pour chaque $j \geq 1$ et un pôle d'ordre $-c+1$. Notons de plus que le résidu à chaque pôle est nul. D'après le point i) du théorème 1.2 de [GT21a], cela est possible si et seulement si l'ordre de tous les zéros est inférieur ou égal à

$$(c-1) + 2 \sum_{j=1}^p \frac{b_j}{2} - (2p+2).$$

Cette condition implique que

$$a_1 \leq c + \sum b_i - 4 - 2p.$$

Le fait que la différence entre la somme des ordres des zéros et la somme des ordres des pôles est égale à -4 implique le résultat. \square

Nous traitons d'abord le cas des strates avec un unique zéro.

Lemme 3.2. *Soit $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a; -b_1, \dots, -b_p; -c_1, \dots, -c_r)$ une strate de genre zéro avec b_i pairs et c_j impairs. Si $r \geq 2$, alors l'image de l'application résiduelle contient $(0, \dots, 0)$.*

Démonstration. Soient deux pôles P_1 et P_2 d'ordres respectifs $-c_1$ et $-c_2$ non pairs. Pour chaque pôle d'ordre $-b_i$ pair nous prenons une partie polaire d'ordre b_i associée à $(1; 1)$. Pour les pôles d'ordres impairs distincts de P_1 , nous prenons la partie polaire associée à $(1; \emptyset)$. Pour P_1 nous prenons la partie polaire d'ordre c_1 associée à $(\emptyset; (1^r))$.

Les collages sont les suivants. Nous collons le bord inférieur de la partie polaire du i -ième pôle d'ordre pair au bord d'en haut du $(i+1)$ -ième pôle d'ordre pair. Le bord inférieur de la partie polaire associée au pôle P_p est collé au bord du segment du pôle P_2 . Enfin, tous les segments restant sont collés au bord de la partie polaire associée à P_1 . Cette construction est illustrée par la figure 4. On vérifie facilement que cette surface possède les propriétés souhaitées.

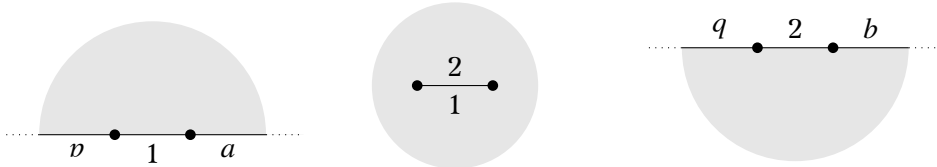


FIGURE 4. Différentielle quadratique de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(6; -3, -3; -4)$ avec un résidu nul

\square

Nous traitons maintenant le cas des strates ayant au moins deux zéros.

Lemme 3.3. *Considérons la partition $\mu = (a_1, \dots, a_i; -b_1, \dots, -b_p; -c_1, \dots, -c_r)$ avec $n \geq 2$. L'image de l'application résiduelle contient l'origine dans les trois cas suivants :*

- i) $r \geq 2$;
- ii) $i \geq 2$;
- iii) $r = 1, i = 1$ et la somme des a_i pairs est supérieure ou égale à $2p$.

Démonstration. La somme $r + i$ est toujours un nombre pair. Si $r \geq 2$, on peut simplement éclater le zéro des différentielles données par le lemme 3.2. Nous traitons ensuite le cas (iii). L'éclatement de zéros permet de se ramener au cas $n = 2$ avec un zéro d'ordre impair a_1 et un zéro d'ordre pair $a_2 \geq 2p$. Nous écrivons $a_1 = 2l_1 - 1$ et $a_2 = 2l_2$ avec $l_2 \geq p$. Nous considérons deux cas selon que $l_1 \geq p$ ou $l_1 < p$.

Dans le cas où $l_1 \geq p$, on associe aux pôles d'ordres $-b_i$ les parties polaires d'ordres b_i et de types τ_i associées à $(1; 1)$. De plus, on choisit les types τ_i de telle sorte que la somme $\sum_i \tau_i$ soit inférieure ou égale à l_1 et maximale pour cette propriété. On note $\bar{l}_1 = l_1 - \sum_i \tau_i$. Pour le pôle d'ordre $-c$ on procède de la façon suivante. On prend la partie polaire d'ordre c associée à $(0; v_1, v_2)$ avec $v_1 = v_2 = 1$ et de type $\bar{l}_1 + 1$. On obtient la différentielle souhaitée en identifiant le bord inférieur de la partie polaire associée à P_i au bord supérieur de celle de P_{i+1} . Le bord supérieur de P_1 est identifié au segment v_1 par rotation et le bord inférieur de la partie polaire d'ordre b_p est identifié au segment v_2 par translation. Cette construction est illustrée à gauche de la figure 5.

Considérons le cas $l_1 < p$. On associe au pôle d'ordre $-c$ la partie polaire d'ordre c associée à $(0; 1)$. Pour l'un des pôles d'ordre $-b_i$, disons $-b_1$, on associe la partie polaire d'ordre b_1 associée à $(1; v_1, v_2)$, avec v_i de même longueur, $v_1 + v_2 = 1$ et l'angle (dans la partie polaire) entre ces deux étant π . Comme a_i est impair, cette partie polaire est non dégénérée. Pour l_1 pôles d'ordre $-b_i$, on associe des parties polaires triviales associées à $(v_1; v_1)$ et de type $\tau_i = b_i - 1$. On colle ces parties polaires de manière cyclique à v_1 et v_2 . Le point correspondant à l'intersection entre v_1 et v_2 est la singularité d'ordre a_1 . On associe aux autres pôles d'ordre $-b_i$ la partie polaire triviale associée à $(1; 1)$. On colle ces parties polaires de manière cyclique aux parties polaires d'ordres b_1 et c pour obtenir la surface plate souhaitée. Cette construction est illustrée à droite de la figure 5.

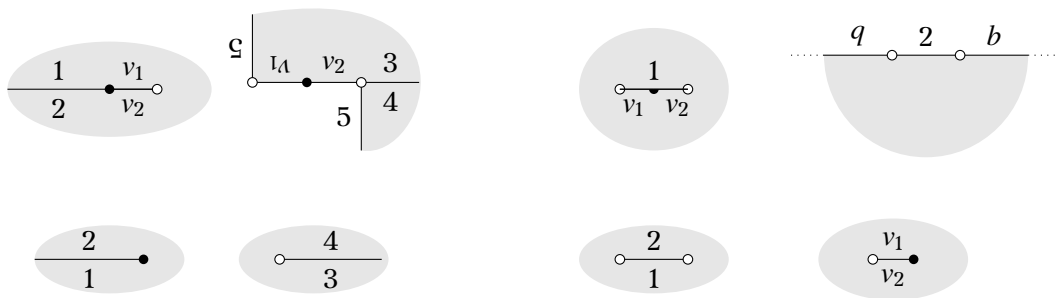


FIGURE 5. Différentielle dont les résidus sont nuls dans la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(4, 3; -6; -5)$ à gauche et dans $\Omega^2 \mathcal{M}_0(1, 10; (-4^3); -3)$ à droite

Il reste à traiter le cas (ii) avec $r = 1$. Comme le nombre de singularités d'ordre impair est pair, nous avons $i \geq 3$. L'éclatement de zéros permet de se ramener au cas $n = i = 3$. Dans une strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2, a_3; -b_1, \dots, -b_p; -c)$. L'ordre total des pôles est au moins $4p + 3$, ce qui implique que l'ordre total des zéros vaut au moins $4p - 1$. Par conséquent, la somme des ordres des deux zéros d'ordre le plus grand vaut toujours au moins $2p$ et donc ce cas s'obtient par éclatement de zéro à partir du cas (iii) traité plus haut. \square

3.2. Le complémentaire de l'origine. Pour terminer la preuve du théorème 1.5 il suffit de montrer que le complémentaire de l'origine est toujours dans l'image de l'application résiduelle. Nous traitons d'abord le cas des strates avec un seul zéro.

Lemme 3.4. *Soit $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a; -b_1, \dots, -b_p; -c_1, \dots, -c_r; (-2^s))$ une strate de genre zéro avec b_i pairs et c_j impairs telle que $r \neq 0$. L'image de l'application résiduelle contient le complémentaire de $(0, \dots, 0)$ dans l'espace résiduel.*

Démonstration. Nous commençons par donner la construction d'une différentielle dans la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(\mu)$ avec $\mu = (a; -b_1, \dots, -b_p; -c_1, \dots, -c_r; (-2^s))$ dont les résidus sont donnés par (R_1, \dots, R_{p+s}) dans $\mathcal{R}_0^2(\mu) \setminus \{(0, \dots, 0)\}$.

Pour les pôles P_{p+i} d'ordre -2 , nous prenons une partie polaire d'ordre 2 associée à une racine carrée r_{p+i} de R_{p+i} . Pour chaque pôle P_i d'ordre $-b_i = -2\ell_i$ tel que $R_i \neq 0$, nous prenons une partie polaire non triviale d'ordre b_i associée à $(r_i; \emptyset)$. Si R_i n'est pas un imaginaire pur alors nous choisissons une racine r_i avec une partie réelle positive. Si R_i est un réel négatif, nous choisissons la racine r_i de partie imaginaire positive. Pour les pôles d'ordre $-b_i$ tels que $r_i = 0$ nous prenons une partie polaire triviale d'ordre b_i associée à $(r_{j_i}; r_{j_i})$ où r_{j_i} est l'une des racines choisie précédemment.

Maintenant, pour tous les pôles d'ordre $-c_i$ sauf un, disons P_1 d'ordre $-c_1$, nous prenons une partie polaire de type c_i associée à $(1; \emptyset)$. Pour le dernier pôle P_l d'ordre $-c_l$, nous prenons la partie polaire de type c_l , sans points d'intersection (voir le lemme 2.3), associée à $(\emptyset; (1^{r-1}, r_1, \dots, r_l))$ où l est le nombre de résidus non nuls.

La surface est obtenue par les recollements suivant. Nous collons le segment inférieur r_{j_i} de chaque partie polaire triviale au bord de la partie non triviale du pôle P_{j_i} . Nous faisons les collages similaires, pour chacun des pôles d'ordres pairs dont le résidu est nul. Ensuite nous collons par translation les bords des parties polaires différentes de P_1 aux segments correspondants du bord de la partie polaire de P_1 . Cette construction est illustrée par la figure 6. La différentielle ξ associée à cette surface plate possède les ordres de pôles et les résidus quadratiques souhaités.

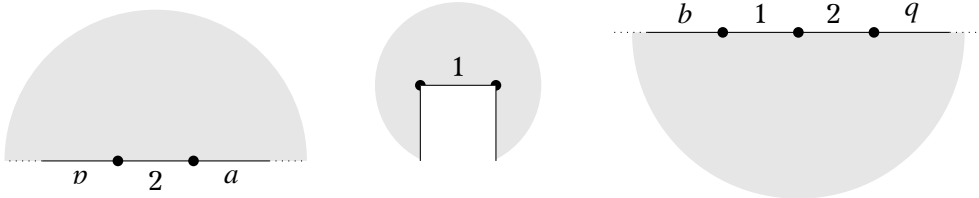


FIGURE 6. Différentielle quadratique de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(6; -3, -3; -4)$ avec un résidu non nul au pôle d'ordre -4

Il reste donc à montrer que le genre de la surface est zéro et que la différentielle ξ possède un unique zéro. Pour cela, il suffit de vérifier que si l'on coupe la surface le long d'un lien-selle, alors on sépare cette surface en deux parties. C'est une conséquence du fait que les liens-selles correspondent aux bords des domaines polaires. \square

Le cas des strates avec au moins deux zéros s'obtient immédiatement par éclatement de singularité. Le théorème 1.5 est donc démontré.

4. DIFFÉRENTIELLES À PÔLES PAIRS NON DOUBLES

Cette section est dédiée aux strates de la forme $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p)$ avec a_1, a_2 impairs et a_i pairs pour tout $i \geq 3$. Nous dénotons tout au long de cette section $b_i := 2\ell_i$ et $a_i := 2l_i + \bar{a}_i$ avec $\bar{a}_i \in \{-1, 0\}$.

4.1. Le cas du résidu nul. Dans cette section nous montrons que les strates de la forme $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p)$ comme ci-dessus qui possèdent une différentielle dont les résidus sont nuls vérifient

$$\sum_{i=3}^n a_i \geq 2p. \quad (4.1)$$

Nous commençons par montrer que l'équation (4.1) est nécessaire pour que l'application résiduelle contienne l'origine.

Lemme 4.1. *Soit $\mu = (a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p)$ une partition telle que a_1 et a_2 sont impairs et a_i est pair pour $i \geq 3$. Si l'application résiduelle $\mathfrak{R}_0^2(\mu)$ contient $(0, \dots, 0)$, alors l'équation (4.1) est satisfaite.*

Démonstration. Soit ξ une différentielle dans la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(\mu)$ dont les résidus sont nuls. Son revêtement canonique π n'est ramifié qu'en deux singularités d'ordre impair et est donc de genre zéro. Les singularités de la racine $\widehat{\omega}$ de $\pi^* \xi$ sont deux zéros $\widehat{z}_1, \widehat{z}_2$ d'ordres $a_1 + 1$ et $a_2 + 1$ respectivement, $2n - 4$ zéros d'ordres $\frac{a_3}{2}, \frac{a_3}{2}, \dots, \frac{a_n}{2}, \frac{a_n}{2}$ et $2p$ pôles d'ordres $-\frac{b_1}{2}, -\frac{b_1}{2}, \dots, -\frac{b_p}{2}, -\frac{b_p}{2}$ dont le résidu est nul. Il s'ensuit que la différentielle abélienne $\widehat{\omega}$ est exacte.

Pour toute fonction méromorphe $f: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\widehat{\omega} = df$, la symétrie du revêtement canonique implique que $f(\widehat{z}_1) = f(\widehat{z}_2)$. On supposera donc sans perte de généralité que $f(\widehat{z}_1) = f(\widehat{z}_2) = 0$. En tant que primitive de $\widehat{\omega}$, la fonction f a $2p$ pôles d'ordres $1 - \frac{b_j}{2}$. La somme des ordres des pôles est donc $2p - \sum_{j=1}^p b_j$.

Aux points \widehat{z}_1 et \widehat{z}_2 , la fonction f possède des zéros d'ordres $2 + a_1$ et $2 + a_2$. Cela implique que $4 + a_1 + a_2 \leq \sum_{j=1}^p b_j - 2p$. De façon équivalente, $a_1 + a_2 \leq \sum_{i=1}^n a_i - 2p$ et donc $\sum_{i=3}^n a_i \geq 2p$. \square

Nous montrons maintenant que l'équation (4.1) est suffisante pour que l'origine soit dans l'image de l'application résiduelle. Pour que cette équation soit satisfaite, il faut que la strate contienne au moins un zéro d'ordre pair. Nous commençons par le cas des strates ayant un unique zéro d'ordre pair et un unique pôle. Notons que dans ce cas l'équation (4.1) est automatiquement satisfaite.

Lemme 4.2. *L'image de l'application résiduelle de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2, a_3; -2\ell)$ contient 0.*

Démonstration. Dans la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(-1, -1, 2; -4)$, la construction se résume à un plan infini muni d'une cicatrice dont les deux côtés sont chacun divisés en deux segments égaux et identifiés par rotation. Pour les strates dont les singularités sont d'ordres plus grands, il est toujours possible d'augmenter de 2 l'ordre d'un zéro de la sorte. On coupe le plan par une demi-droite partant de celui-ci et on y colle un plan infini. Nous obtenons de cette façon une différentielle à résidus nuls dans toutes les strates considérées. \square

Nous traitons maintenant le cas avec un unique zéro pair et $p \geq 2$ pôles.

Lemme 4.3. *Soit $\mu = (a_1, a_2, a_3; -b_1, \dots, -b_p)$ une partition telle que a_1 et a_2 sont impairs et a_3 est pair. Si $a_3 \geq 2p$, alors l'application résiduelle $\mathfrak{R}_0^2(\mu)$ contient $(0, \dots, 0)$.*

Démonstration. Nous supposons dans un premier temps que $a_1 + a_2 \geq 2p - 4$. Rappelons que pour $i \in \{1, 2\}$ on note $a_i = 2l_i - 1$ avec $l_i \geq 0$. Nous supposons que $a_1 \leq a_2$ et $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_p$. Soit k' tel que

$$(b_1 - 4) + \sum_{i=2}^{k'} (b_i - 2) \geq a_2 \text{ et } (b_1 - 4) + \sum_{i=2}^{k'-1} (b_i - 2) < a_2,$$

et $k \geq k'$ tel que $p - k \leq l_1$. Comme $a_1 + a_2 \geq 2p - 4$, un tel k existe. Considérons la différentielle de la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(-1, -1, 2; -4)$ construite dans la preuve du lemme 4.2. On coupe le long d'un lien-selle et on colle de manière cyclique les $k - 1$ parties polaires associés

à $(1; 1)$ correspondant aux pôles b_i pour $i \in \{2, \dots, k\}$. Les parties polaires associées aux autres pôles sont collées de manière cyclique aux segments obtenus en coupant l'autre lien-selle. On choisit alors les types des parties polaire des $k-1$ parties polaires de telle sorte que leurs contributions à l'angle de la singularité correspondant à a_2 soit inférieures ou égale à $2l_2\pi$. Puis on coupe la partie polaire associée au pôle d'ordre $-b_1$ le long d'une demi-droite qui part de la singularité correspondant à a_2 et on ajoute de manière cyclique le nombre de plans afin d'obtenir l'angle $\pi(a_2 + 2)$. On fait la construction similaire pour a_1 et on obtient la différentielle avec les propriétés désirées.

Nous supposons à présent que $a_1 + a_2 \leq 2p - 6$ (la somme de ces ordres est toujours paire), i.e. que $l_1 + l_2 \leq p - 2$. On considère deux parties polaires P_1 et P_2 respectivement associées à $(1, 1; 2)$ et $(2; 1, 1)$. On colle l_i parties polaires associées à $(1; 1)$ de manière cyclique aux segments de longueur 1 de P_i . Le type est choisi de sorte que chaque partie polaire ne contribue que d'un angle 2π au singularité a_1 et a_2 . Finalement, pour les autres pôles, on colle les parties polaires associée à $(2; 2)$ entre les segments de longueur 2 des P_i . \square

Nous considérons les strates qui possède un nombre arbitraire de zéros paires.

Lemme 4.4. *Soit $\mu = (a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p)$ une partition telle que a_1 et a_2 sont impairs et a_i est pair pour $i \geq 3$. Si l'image de l'application résiduelle $\mathfrak{R}_0^2(\mu)$ contient $(0, \dots, 0)$ alors $\sum_{i=3}^n a_i \geq 2p$.*

Démonstration. Il reste à considérer le cas où $n > 3$. Une différentielle dont les résidus sont nuls est obtenue en éclatant par la propriété 2.6 l'unique zéro pair d'une différentielle de la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2, \sum_{i=3}^n a_i; -b_1, \dots, -b_p)$ dont les résidus sont nuls. \square

4.2. Les résidus sont nuls ou tous égaux entre eux. Les configurations formées de résidus nuls ou tous égaux entre eux présentent des obstructions spécifiques. Sans perte de généralité, nous supposons que les résidus non nuls sont égaux à 1. Nous considérons dans un premier temps le cas des strates avec deux zéros (d'ordre impair) puis terminons par le cas des strates avec deux zéros impairs et un nombre arbitraire de zéros pairs.

Nous commençons par le cas des strates de différentielles ayant un unique pôle.

Lemme 4.5. *L'image de l'application résiduelle de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -2\ell)$ contient \mathbf{C}^* .*

Démonstration. Soit ξ une différentielle quadratique dans $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -2\ell)$. Le lemme 4.1 implique que le résidu de ξ n'est pas nul, donc que tous les résidus non nuls sont réalisables. \square

Nous distinguons ensuite les cas selon si le nombre de résidus non nuls est pair ou impair.

Lemme 4.6. *Soit $p \geq 2$ et $i \leq p$ impair. L'image de l'application résiduelle des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -b_1, \dots, -b_p)$ avec a_1, a_2 impairs contient tous les uplets contenant i éléments égaux à 1 et $p-i$ égaux à 0.*

Démonstration. Dans un premier temps, on considère le cas où tous les résidus quadratique sont nuls à l'exception d'un seul que l'on supposera égal à 4. Nous collons des domaines polaires standards (voir la section 2.2) le long de liens-selles selon un graphe d'incidence. Ce graphe est composé d'une boucle formée par s sommets de valence 2 et collée à un sommet de valence 3 auquel est attaché une chaîne composé de $p-s-1$ sommets se terminant par un sommet de valence 1. Le cas extrême $p=s$ correspond à un graphe cyclique, mais la construction reste la même. Les s sommets de la boucle correspondent à des domaines polaires associés aux vecteurs $(1; 1)$, tandis que les $p-s-1$ sommets intermédiaires de la chaîne correspondent à des domaines polaires associés aux vecteurs $(2; 2)$. Le sommet de valence 3 correspond à un domaine polaire associé aux vecteurs $(1, 1; 2)$ et le dernier sommet de la chaîne correspond à un domaine polaire associé aux vecteurs $(2; 0)$. Si $s=p$,

un domaine polaire est associé aux vecteurs $(1, 1; \emptyset)$ et les autres à $(1, 1)$. La différentielle quadratique obtenue en recollant les parties polaires selon le graphe d'incidence possède un résidu quadratique égal à 4 et $p - 1$ nuls.

Nous montrons maintenant que la différentielle ainsi formée peut avoir les zéros d'ordres souhaités. Cela se fait grâce au choix du type des domaines polaires (voir la section 2.2). On peut remarquer que l'une des singularités coniques n'est adjacent qu'aux domaines polaires de la boucle tandis que l'autre est adjacent à tous les domaines polaires. On note a_1 l'ordre de la première singularité. L'angle de cette singularité est $\pi + 2s\pi$ auquel on ajoute des multiples de 2π correspondant aux types des domaines polaires qui contribuent à cette singularité. Sachant que l'on peut mettre n'importe quel sommet de résidu nul dans la boucle, l'angle total de cette singularité peut aller de π (si $s = 0$ et que le type du domaine correspondant au sommet de valence 3 est choisi de façon adéquate) jusqu'à $-\pi + \pi \sum_{j=1}^p (b_j - 2)$. L'ordre de a_1 peut donc aller de -1 jusqu'à $-3 + \sum_{j=1}^p (b_j - 2)$. Ceci couvre tous les ordres possibles et donc toutes les strates considérées.

Nous traitons enfin le cas général d'un nombre $t \geq 3$ impair de résidus quadratiques égaux entre eux. Pour cela, il suffit de considérer la différentielle construite au paragraphe précédent et de changer des paires de pôles à résidus nul en paires de pôles à résidus égaux à 4. Pour cela, on considère deux domaines polaires à résidu nul séparés par un lien-selle d'une certaine longueur. On accroît cette longueur jusqu'à ce que chacun des deux résidus quadratiques soit égal à 4. Ce processus ne modifie pas l'ordre des zéros. On applique cette construction à $(t - 1)/2$ paires de domaines polaires consécutives. Notons que la forme du graphe d'incidence implique qu'il existe un choix pour ces paires. Cela conclut la preuve. \square

Nous traitons maintenant les cas des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -b_1, \dots, -b_p)$ contenant un nombre pair de résidus égaux entre eux. Nous commençons par le cas où il y a au moins 4 résidus non nuls.

Lemme 4.7. *Soit $p \geq 2$ et $4 \leq i \leq p$ pair. L'image de l'application résiduelle des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -b_1, \dots, -b_p)$ avec a_1, a_2 impairs contient tous les uplets contenant i éléments égaux à 1 et $p - i$ égaux à 0.*

Démonstration. Nous commençons par montrer que $(1, 1, 1, 1)$ est dans l'image de l'application résiduelle pour les strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(7, 5; (-4^4))$, $\Omega^2 \mathcal{M}_0(9, 3; (-4^4))$, $\Omega^2 \mathcal{M}_0(11, 1; (-4^4))$ et $\Omega^2 \mathcal{M}_0(13, -1; (-4^4))$. La figure 7 une différentielle avec ces résidus dans $\Omega^2 \mathcal{M}_0(7, 5; (-4^4))$. Pour les strates de la forme $\Omega^2 \mathcal{M}_0(13 - 2k, -1 + 2k; (-4^4))$ avec $0 \leq k \leq 2$, nous collons



FIGURE 7. Différentielle de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(7, 5; (-4^4))$ dont les résidus sont $(1, 1, 1, 1)$

des parties polaires d'ordre 4 le long de liens-selles selon les graphes d'incidence suivants. Ces graphes contiennent une boucle formée par k sommets de valence 2 qui est collée à un sommet de valence 3 auquel est attaché une chaîne composée de $3 - k$ sommets. Ces graphes sont représentés dans la figure 8. Les parties polaires correspondant aux sommets sont associés aux vecteurs donnés dans la figure 8. On vérifie sans difficulté que le recollement de ces parties polaires donne des différentielles aux singularités souhaitées.

Dans le cas où tous les pôles sont d'ordres -4 , on ajoute aux différentielles construites aux paragraphes précédents des parties polaires comme suit. Pour obtenir des pôles dont les

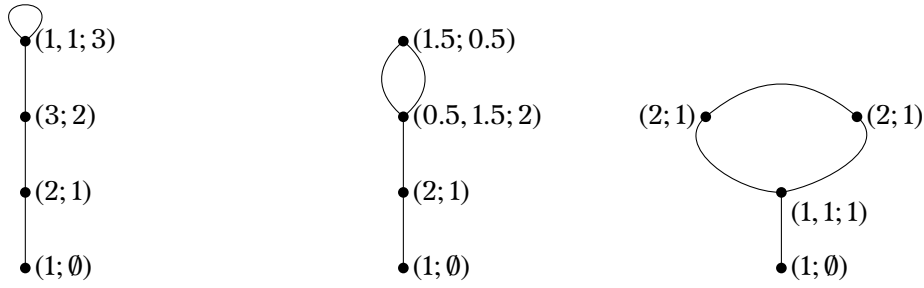


FIGURE 8. Les graphes d'incidence pour les exemples dans les strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(13 - 2k, -1 + 2k; (-4^4))$ avec $0 \leq k \leq 2$ de gauche à droite

résidus sont égaux à 1, resp. 0, on peut ajouter une partie polaire associée à des vecteurs de la forme $(v; v + 1)$, resp. (v, v) , à la boucle ou à la chaîne. La première opération ajoute 2 à l'ordre de chaque zéro et la seconde 4 à l'ordre du zéro le plus grand. Cela permet d'obtenir toutes les strates considérées.

Dans le cas général, il suffit de coller des plans de manière cyclique à une demi-fente infinie partant de l'un des deux zéros. Un calcul simple montre que l'on peut obtenir tous les ordres des deux zéros. \square

Il reste à présent le cas des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -b_1, \dots, -b_p)$ dont exactement deux résidus sont non nuls et égaux entre eux. On traite d'abord les cas pour lesquels un pôle d'ordre inférieur ou égal à -6 possède un résidu nul.

Lemme 4.8. *L'image de l'application résiduelle des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -b_1, \dots, -b_p)$ avec $a_i \geq -1$ impairs contient $(1, 1, 0, \dots, 0)$ dès lors qu'un pôle d'ordre inférieur ou égal à -6 possède un résidu nul.*

Démonstration. Nous montrons tout d'abord que $(1, 1, 0)$ est dans l'image de l'application résiduelle des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(5, 5; -4, -4, -6)$, $\Omega^2 \mathcal{M}_0(7, 3; -4, -4, -6)$, $\Omega^2 \mathcal{M}_0(9, 1; -4, -4, -6)$ et $\Omega^2 \mathcal{M}_0(11, -1; -4, -4, -6)$ si le pôle d'ordre -6 a un résidu nul.

On commence par la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(5, 5; -4, -4, -6)$. Pour le pôle d'ordre -6 , on colle par translation les demi-fentes infinies de deux domaines polaires ouverts à droite associés au vecteur $(1; 1)$. Pour les pôles d'ordre -4 on considère deux parties polaires d'ordre 4 associés à $(1; \emptyset)$. La différentielle quadratique est obtenue en collant les deux segments des parties polaires d'ordre -4 aux segments inférieurs de celle d'ordre 6 par translation et les deux segments supérieurs entre eux par rotation d'angle π .

Pour la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(11, -1; -4, -4, -6)$, on considère une partie polaire d'ordre 6 associée à $(1, 1; 1, 1)$ et deux parties polaires d'ordre 4 associées à $(1, \emptyset)$. On colle les deux segments supérieurs de la polaire d'ordre 6 par translation et les autres segments les uns sur les autres par translations.

Pour les strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(7, 3; -4, -4, -6)$ et $\Omega^2 \mathcal{M}_0(9, 1; -4, -4, -6)$, nous considérons des parties polaires d'ordre 4 associées respectivement à $(v_2, v_3; v_1)$ et v_3 où $v_1 = v_2 = 1/2$ et $v_3 = 1$. Pour les pôles d'ordre -6 , on considère la partie polaire d'ordre 6 associée à $(v_1, v_2; \emptyset)$ dans le premier cas et à $(v_2, v_1; \emptyset)$ dans le second. Les recollements des sommets v_i entre eux donnent les différentielles quadratiques voulues.

Comme dans la preuve du lemme 4.7, l'ajout de parties polaires et l'augmentation de l'ordre de certains pôles en collant cycliquement des plans avec des demi-fentes infinies, permet d'obtenir les résidus quadratiques $(1, 1, 0, \dots, 0)$ dans tous les cas considérés. \square

Il reste donc à considérer les cas avec deux résidus quadratiques non nuls égaux entre eux et avec des résidus nuls uniquement à des pôles d'ordre -4 .

Lemme 4.9. *Étant donnée une strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -b_1, -b_2, (-4^{p-2}))$ avec a_1, a_2 impairs, b_1, b_2 pairs supérieurs ou égaux à 4 et $p \geq 2$. L'image de l'application résiduelle contient $(1, 1, (0^{p-2}))$ sauf précisément pour les strates suivantes :*

- $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2p + b - 5, 2p + b - 5; -b, -b - 2, (-4^{p-2}))$ avec $b \geq 4$ pair ;
- $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2p + b - 7, 2p + b - 5; -b, -b, (-4^{p-2}))$ avec $b \geq 4$ pair.

Démonstration. Soit η une différentielle dans $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -b_1, -b_2, (-4^{p-2}))$ qui possède les résidus souhaités. Par la proposition 2.8, on peut supposer que η possède exactement p liens-selles, tous horizontaux et reliant p domaines polaires. Dans le graphe d'incidence défini dans la section 2.4, chaque feuille (sommet de valence 1) correspond à un domaine polaire bordé par un unique lien-selle horizontal. Il s'ensuit que les seuls domaines polaires pouvant être des feuilles sont ceux dont le pôle a un résidu non nul. Nous distinguerons trois cas selon si le graphe d'incidence compte zéro, une ou deux feuilles. Dans chacun de ces trois cas, nous établirons quelles sont les strates dans laquelle la configuration est réalisable.

S'il n'y a aucun sommet de valence 1, alors le graphe d'incidence est cyclique. Il faut alors considérer les longueurs des liens-selles le long du cycle. De part et d'autre d'un domaine polaire de résidu nul, les liens-selles conservent la même longueur. Les longueurs des liens-selles au bord des domaines polaires dont le résidu est égal à 1 satisfont $\lambda + \mu = 1$ ou $\mu - \lambda = 1$. La différentielle quadratique η étant primitive, chacun des domaines polaires de résidu non nul produit une équation différentielle. Elles ne peuvent être simultanément satisfaites.

Ensuite, s'il y a exactement un sommet de valence 1 dans le graphe d'incidence, alors il y a un unique sommet de valence 3. Le graphe d'incidence est du même type que ceux de la figure 8, avec un nombre arbitraire de sommets sur la boucle et sur la chaîne. La construction décrite dans la preuve du lemme 4.7 s'applique de manière analogue. Nous donnons maintenant la description des strates qui peuvent s'obtenir de cette façon. Il s'agit de répartir les domaines polaires de façon à réaliser les ordres des zéros souhaités. L'ordre de la singularité conique au bord des domaines polaires de la chaîne est supérieur ou égal à $2p - 3 + b_1$ (si b_1 est au bout de la chaîne). En effet, chaque domaine polaire contribue à cette singularité conique d'un angle supérieur ou égal à 2π , auxquels se rajoutent 2π pour le sommet de valence 3 et $(b_1 - 3)\pi$ pour celui de valence 1. On peut donc attribuer à l'une des deux singularités n'importe quelle valeur (impaire) à partir de $2p - 3 + b_1$. Comme $a_1 + a_2 = -4 + b_1 + b_2 + 4(p - 2)$, cela signifie que l'autre singularité prendra au plus la valeur $-4 + b_1 + b_2 + 4(p - 2) - (2p - 3 + b_1)$, c'est-à-dire $2p - 9 + b_2$. Donc, si $b_2 \geq b_1 + 6$, tous les ordres de singularités sont réalisables. Si $b_2 = b_1 + 4$, alors on a $a_2 \geq b_1 + 2p - 1 > 2p - 3 + b_1$, et tous les ordres de zéros sont donc possible. Dans les cas avec $b_2 = b_1$ ou $b_2 = b_1 + 2$ on vérifie de la même façon que l'on peut obtenir tous les ordres de zéros à l'exception des deux obstructions du lemme 4.9.

Il reste donc à montrer pour ces deux cas il n'existe pas de différentielle quadratique ayant pour résidus $(1, 1, 0, \dots, 0)$. Il suffit de montrer qu'une construction avec un graphe d'incidence ayant deux sommets de valence 1 ne fonctionne pas. Il faut distinguer deux cas selon s'il existe un sommet de valence 4 ou deux sommets de valence 3 parmi les pôles de résidu nul.

Le cas avec deux sommets de valence 3 est équivalent au cas cyclique, les longueurs des liens-selles le long du cycle contenu dans le graphe sont λ et μ dans les tronçons découpés par les sommets de valence 3. Les relations $\lambda + \mu = 1$ et $\mu - \lambda = 1$ sont contradictoires et la différentielle ne peut donc pas exister.

Considérons enfin le cas où il y a un unique sommet de valence 4. Le bord du domaine polaire associé possède quatre liens-selles consécutifs horizontaux. Deux liens-selles correspondent au cycle contenu dans le graphe. Ils ont donc la même longueur et la même orientation, car la différentielle est primitive et que tous les pôles du cycle ont un résidu nul. Les deux autres segments sont nécessairement de longueur 1 et de l'autre orientation. La géométrie de la surface est ainsi entièrement déterminée. Les deux branches contribuent

à la même singularité conique. Chaque domaine polaire du cycle ajoute 2π à chaque singularité conique. Enfin, dans le sommet de valence 4, sur l'angle total de 6π , il y a 5π pour la singularité conique à laquelle contribuent les deux branches et π pour l'autre singularité. L'écart d'angle total entre les deux singularités coniques est donc au minimum de 4π . L'écart d'ordre est donc supérieur ou égal à 4. Ainsi, les résidus quadratiques $(1, 1, 0, \dots, 0)$ ne sont pas réalisables dans les strates considérées. \square

Pour terminer nous considérons le cas des strates avec un nombre arbitraire de zéros pairs.

Lemme 4.10. *L'application résiduelle de la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p)$ avec a_1, a_2 impairs et a_i pairs pour $i \geq 3$ contient les résidus de la forme $((0^{p_1}), (1^{p_2}))$ avec $p_2 \geq 1$.*

Démonstration. Une différentielle de la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p)$ dont le résidu est non nul est obtenue en éclatant par la proposition 2.6 les zéros d'une différentielle de la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a'_1, a'_2; -b_1, \dots, -b_p)$ sans modifier le résidu. Plus précisément, on vérifie qu'à l'exception d'un cas, on peut toujours partir d'une strate qui n'est pas de la forme de l'une des deux obstruction du lemme 4.9. Cela est clair dans le cas où les deux zéros sont d'ordre $2p + b - 5$. Dans le cas où les zéros sont d'ordres respectifs $2p + b - 5$ et $2p + b - 7$ c'est le cas sauf si les zéros sont d'ordres $(2p + b - 7, 2p + b - 7, 2)$. Il reste donc à montrer que le résidu $(1, 1, (0^{p-2}))$ est réalisable dans la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2p + b - 7, 2p + b - 7, 2; -b, -b, (-4^{p-2}))$. La figure 9 montre une différentielle quadratique de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(1, 1, 2; -4, -4)$ dont les résidus quadratiques sont $(1, 1)$. Le cas des strates de la forme $\Omega^2 \mathcal{M}_0(b-3, b-3, 2; -b, -b)$ s'obtiennent

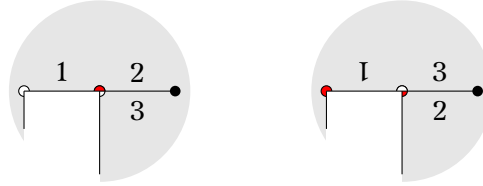


FIGURE 9. Différentielle quadratique de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(1, 1, 2; -4, -4)$ dont les résidus sont $(1, 1)$

de manière similaire en utilisant des parties polaires d'ordre b et de type $b - 1$ associés aux mêmes vecteurs que dans la figure 9. Enfin, le cas général se déduit de celui-ci en coupant le long du lien-selle noté 1 et en collant de manière cyclique des parties polaires d'ordre 4 associées à $(1, 1)$. \square

4.3. Le cas général. Nous considérons maintenant le cas des configurations où les résidus non nuls ne sont pas tous égaux. Ceci implique en particulier $p \geq 2$. Nous traitons d'abord le cas où l'un des zéros est d'ordre -1 .

Lemme 4.11. *L'image de $\mathfrak{R}_0^2(-1, a; -2\ell_1, \dots, -2\ell_p)$ avec $p \geq 2$ contient le complémentaire des droites engendrées par les vecteurs qui ne contiennent que des 0 et des 1.*

Démonstration. Nous supposons que les pôles dont le résidu quadratique est nul sont P_1, \dots, P_t et que les résidus R_{t+1}, \dots, R_p aux pôles P_{t+1}, \dots, P_p sont non nuls. Nous construisons une différentielle dont les résidus quadratiques sont (R_1, \dots, R_p) de la manière suivante.

Pour chaque i , nous prenons une racine carrée r_i de R_i telle que $\Re(r_i) \geq 0$ et si $\Re(r_i) = 0$, alors $\Im(r_i) > 0$. Quitte à permuter les pôles, on peut supposer que $S = -r_1 + \sum_{i \geq 2} r_i$ est non nul. En effet, il suffit de choisir r_1 comme la racine de résidu quadratique dont la partie réelle est la plus petite. Dans ce cas, S ne peut être nul que si $p = 2$ et que r_1 et r_2 sont égaux. Cette configuration est exclue (elle est engendrée par $(1, 1)$). Nous définissons v_1 et v_2 deux vecteurs chacun égal à $\frac{S}{2}$.

On associe au pôle P_1 la partie polaire triviale d'ordre $2\ell_1$ associée à $(v_1, v_2; r_{t+1}, \dots, r_p)$ si $R_1 = 0$ et la partie polaire non triviale associée à $(v_1, v_2; r_2, \dots, r_p)$ si $R_1 \neq 0$. L'angle au point d'intersection de v_1 et v_2 est π . On évite tout problème d'auto-intersection en réarrangeant les $v_1, v_2; r_2, \dots, r_p$ par argument croissant. Pour les autres pôles P_i , on prend une partie polaire associée à $(r_i; \emptyset)$ si $R_i \neq 0$ et $(r_{j_i}; r_{j_i})$ avec $j_i > t$ si $R_i = 0$. Il reste à identifier tous les segments par translation à exception des v_i que nous identifions par rotation d'angle π . Cette surface plate possède les invariants locaux souhaités. \square

Le résultat suivant couvre la majeure partie des cas.

Lemme 4.12. *L'image de $\mathfrak{R}_0^2(a_1, a_2; -2\ell_1, \dots, -2\ell_p)$ avec $p \geq 2$ et $a_1, a_2 \geq 1$ contient le complémentaire des droites engendrées par les vecteurs qui ne contiennent que des 0 et des 1.*

Démonstration. Nous supposons que les pôles dont le résidu quadratique est nul sont P_1, \dots, P_t et que les résidus R_{t+1}, \dots, R_p aux pôles P_{t+1}, \dots, P_p sont non nuls. Rappelons la notation $a_i = 2l_i - 1$ avec $l_1 \leq l_2$. Nous ferons une construction différente selon que l'équation

$$l_1 \leq \sum_{i=1}^t (\ell_i - 1) \quad (4.2)$$

est satisfaite ou non.

L'équation (4.2) est satisfaite. Dans ce cas il existe un entier $m \leq t$ tel que

$$\ell_m^- := \sum_{i=1}^{m-1} (\ell_i - 1) < l_1 \leq \sum_{i=1}^m (\ell_i - 1).$$

On associe au pôle P_m la partie polaire d'ordre $2(\ell_m - (l_1 - \ell_m^-) + 1)$ et de type $\ell_m - (l_1 - \ell_m^-)$ associée à $(v_1, v_2; r_{t+1}, \dots, r_p)$ où les $v_1 = v_2$ sont de même longueur, $v_1 + v_2 = \sum r_i$. Puis on coupe cette partie polaire par une demi-droite commençant au point d'intersection de v_1 et v_2 . Enfin on colle de manière cyclique $(l_1 - \ell_m^- - 1)$ domaines basiques triviaux à cette demi droite. En prenant les r_i tels que $\Re(r_i) \geq 0$ et $\Im(r_i) > 0$ si $\Re(r_i) = 0$, la ligne brisée formée des r_i ne possède pas de points d'auto-intersection. Ensuite, on associe aux $m - 1$ premiers pôles la partie polaire d'ordre b_i et de type 1 associée à $(v_1; v_1)$. On colle les bords de ces parties polaires entre elles par translation de manière cyclique. Les segments v_1 et v_2 de la partie polaire spéciale sont collés aux bords restant par rotation et translation. Pour les autres pôles P_i d'indices $m < i \leq t$, on prend la partie polaire associée à $(r_{j_i}; r_{j_i})$ avec $j_i > t$. Les identifications sont données comme précédemment. Cette construction est illustrée par la figure 10. Cela définit une différentielle avec les invariants locaux souhaités.

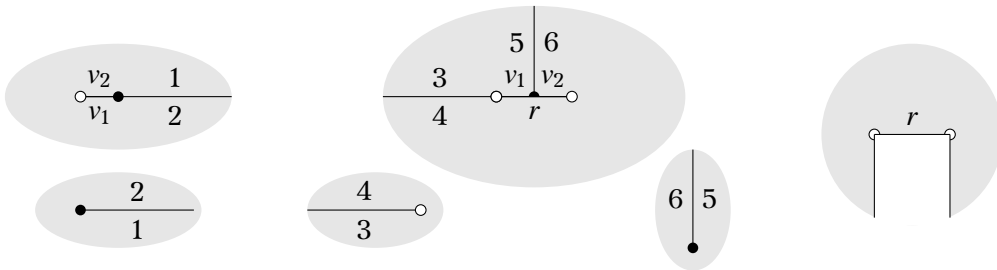


FIGURE 10. Une différentielle dans $\Omega^2 \mathcal{M}_0(5, 9; -6, -8, -4)$ avec un unique résidu non nul au pôle d'ordre -4

L'équation (4.2) n'est pas satisfaite, i.e. $l_1 > \sum_{i=1}^l (\ell_i - 1)$. Supposons tout d'abord qu'il existe deux pôles dont les résidus sont non nuls. Commençons par le cas de la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(1, 3; -4, -4)$. Quitte à multiplier les résidus, on peut supposer qu'ils sont égaux à 1 et R avec $|R| \leq 1$ et $R \neq 1$. Soit r une racine carrée de R de partie réelle positive. On définit $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^*$ tels que $v_1 + v_2 = 1$ et $v_1 - v_2 = r$. Comme $v_1 = \frac{1+r}{2}$ et $v_2 = \frac{1-r}{2}$, la partie réelle de ces vecteurs est positive. On forme alors les parties polaires $(\emptyset; v_1, v_2)$ et $(v_1; v_2)$. La différentielle est obtenue en collant les segments v_1 par translation et v_2 par rotation. Si les pôles ne sont pas d'ordres -4 , on obtient tous les invariants en coupant ces différentielles le long de demi-droites partant des zéros et en ajoutant des plans de manière cyclique. Notons que cette méthode permet d'obtenir tous les invariants car les deux zéros sont au bord de chaque domaine polaire. Enfin, s'il existe des pôles dont le résidu est nul, on coupe la surface plate associée à ces différentielles le long de liens-selles et on ajoute les parties polaires correspondant à ces pôles. En choisissant l'ordre des parties polaires, on obtient de cette façon toutes les strates telles que $l_1 > \sum_{i=1}^l (\ell_i - 1)$ est satisfaite.

Maintenant, on considère le cas où au moins trois pôles ont un résidu non nul. Considérons pour commencer le cas de trois pôles d'ordre -4 de résidus (R_1, R_2, R_3) dans \mathbb{C}^* . Dans ce cas, il reste à considérer les strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(5, 3; -4, -4, -4)$ et $\Omega^2 \mathcal{M}_0(7, 1; -4, -4, -4)$.

Dans le premier cas, nous considérons la construction suivante. Nous définissons trois vecteurs v, v_1, v_2 qui satisfont les équations $v + v_i = r_i$ et $v_1 + v_2 = r_3$. L'unique contrainte sur des vecteurs est qu'ils doivent être non nuls. Cela peut toujours être réalisé quitte à changer le signe de l'un des r_i . On considère trois parties polaires d'ordre 4 associées à $(v, v_1; \emptyset)$, $(v, v_2; \emptyset)$ et $(\emptyset; v_1, v_2)$. Comme chaque partie polaire ne contient que deux vecteurs, cette construction peut se réaliser pour toutes les valeurs de ces segments. On identifie alors les vecteurs de même nom ensemble pour obtenir une différentielle avec les invariants souhaités. Cette construction est illustrée dans la figure 11.

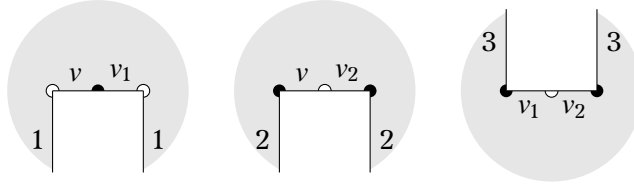


FIGURE 11. Différentielle de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(3, 5; -4, -4, -4)$ dont les résidus sont $(1, 1, 1)$

Dans le cas de la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(7, 1; -4, -4, -4)$, nous définissons trois vecteurs v, v_1, v_2 qui satisfont les équations $v_1 = r_1$, $v_1 + v_2 = r_2$ et $2v + v_2 = r_3$. Comme précédemment on obtient des vecteurs non nuls quitte à changer le signe de l'un des r_i . De plus, on peut supposer, quitte à changer le signe de r_3 , que si v est négativement proportionnel à v_2 alors $|v| \leq |v_2|$ avec égalité si et seulement si $r_1 = r_2 = r_3/4$. Si v_2 n'est pas négativement proportionnel à v , on considère trois parties polaires d'ordre 4 dont les bords respectifs sont les segments $(v_1; \emptyset)$, (v_2, v_1) et $(\emptyset; v, v_2, v)$. Si v_2 est proportionnel à v et $|v| < |v_2|$, on remplace v_2 par $v'_2 = v_2 - v$ et considère trois parties polaires d'ordre 4 associées respectivement à $(v_1; \emptyset)$, $(v, v_2; v_1)$ et $(v; v_2)$. Enfin si $v = -v_2$, on considère les trois parties polaires dont les bords sont $(v_1; \emptyset)$, $(v_1, v/2; v/2)$ et $(v/2, v/2; \emptyset)$. Ce cas est représenté dans la figure 12 avec $v_2 = v_3 = v/2$. On identifie alors les vecteurs de même nom ensemble pour obtenir une différentielle avec les invariants souhaités.

Les strates de la forme $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -2\ell_1, -2\ell_2, -2\ell_3)$ s'obtiennent à partir des différentielles du paragraphe précédent en collant des plans cycliquement en partant des singularités.

Considérons maintenant une strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -4, \dots, -4)$ avec $p \geq 4$ pôles qui possèdent tous un résidu non nul. Comme précédemment, le cas des ordres généraux s'obtient à partir de celui-là en ajoutant des plans. Si $a_1 = 1$, on généralise la construction de la

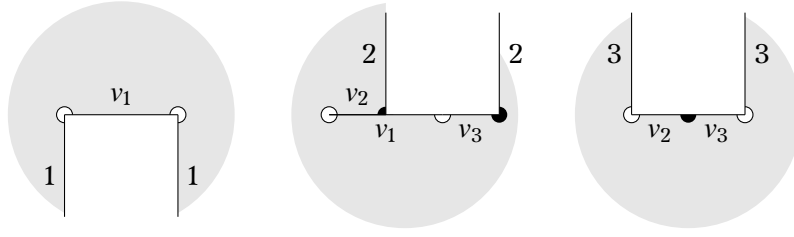


FIGURE 12. Différentielle de $\Omega^2\mathcal{M}_0(1, 7; -4, -4, -4)$ dont les résidus sont $(1, 1, 1)$

strate $\Omega^2\mathcal{M}_0(7, 1; -4, -4, -4)$ en ajoutant des domaines polaires bordés par deux liens selles. Si $a_1 = a_2 + 2$, alors la généralisation du cas $\Omega^2\mathcal{M}_0(5, 3; -4, -4, -4)$ avec plus de pôles donne l'existence des différentielles avec ces invariants. Dans les autres cas, on considère la construction suivante. On enlève α pôles d'ordre -4 tel que $a_1 + 2 = a_2 - 4\alpha$. On considère les racines r_i avec une partie réelle positive des résidus aux pôles choisis. On les concatène par argument décroissant et on forme un polygone en reliant le point initial au point final par un segment v . La différentielle quadratique est obtenue de la façon suivante. On colle au polygone les parties polaires d'ordres 4 associées aux $(r_i; \emptyset)$. Avec les pôles restant on fait la construction du cas $a_1 + 2 = a_2$ modifiée comme suit. On considère tout d'abord la construction originale avec pour l'un des pôles le bord constitué de deux segments tels que la somme est égale à une racine de son résidu à laquelle on enlève v (de telle sorte que la somme soit non nulle). On suppose de plus que dans ce domaine polaire, le zéro d'ordre a_2 correspond aux points extrémaux des segments. On place alors le segment v au bord cette partie polaire à partir d'un sommet correspondant au zéro d'ordre a_2 . En choisissant soit le sommet de gauche ou de droite, on peut s'assurer que le bord de la partie polaire ne possède pas de points d'auto-intersection. On conclut la construction en collant les segments v ensemble et les autres segments au bord des domaines polaires comme précédemment.

Enfin il reste à traiter le cas où le résidu de certains pôles sont nuls. Dans ce cas on considère la strate obtenue en retirant ces pôles, en soustrayant $\sum_{i=1}^t(\ell_i - 1)$ à l_1 et t à l_2 . Notons que l'hypothèse $l_1 > \sum_{i=1}^t(\ell_i - 1)$ nous assure de l'existence de cette strate. On considère alors la surface plate associée à une différentielle construite aux paragraphes précédent. On la coupe le long d'un lien selle reliant les deux singularités (qui existe par construction). Puis on colle cycliquement les parties polaires d'ordres $2\ell_i$ et de type 0. La différentielle obtenue possède les propriétés souhaitées. \square

Reste à traiter le cas des strates $\Omega^2\mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p)$ avec $n \geq 3$.

Lemme 4.13. *L'image de l'application résiduelle des strates $\Omega^2\mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p)$ vérifiant $n \geq 3$ contient le complémentaire de l'origine de l'espace résiduel.*

Démonstration. Les lemmes 4.4 et 4.10 traitent des cas où les résidus sont soit nuls soit égaux à 1. Pour les autres résidus, la preuve se fait par éclatement de zéros à partir des strates ayant deux zéros. \square

5. DIFFÉRENTIELLES À PÔLES PAIRS

Cette section est dédiée à la preuve du théorème 1.6 qui traite du cas des strates $\Omega^2\mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p; (-2^s))$ avec $p \neq 0$, $s \neq 0$ et deux zéros d'ordre impair a_1 et a_2 . Tout au long de cette section nous noterons $b_i := 2\ell_i$ et $a_i := kl_i + \bar{a}_i$ avec $\bar{a}_i \in \{-1, 0\}$.

5.1. Obstructions. Les lemmes suivants fournissent la liste des strates exceptionnelles pour lesquelles certains résidus ne sont pas réalisables.

Lemme 5.1. *L'image de l'application résiduelle de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2s' - 1, 2s' + 1; -4; (-2^{2s'}))$ avec $s' \geq 1$ ne contient pas $\mathbf{C}^* \cdot (0; 1, \dots, 1)$.*

L'image de l'application résiduelle des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2a - 1, 2a + 1; (-4^a); (-2^2))$ avec $a \geq 0$ ne contient pas $\mathbf{C}^ \cdot (0, \dots, 0; 1, 1)$.*

Démonstration. Supposons qu'une différentielle ξ_0 de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2s' - 1, 2s' + 1; -4; (-2^{2s'}))$ possède les résidus quadratiques $(0, 1, \dots, 1)$. Nous formons alors une différentielle entrelacée en attachant une courbe elliptique munie d'une différentielle quadratique holomorphe au pôle quadruple de ξ_0 . Cette différentielle quadratique entrelacée peut être lissée sans modifier les résidus aux pôles doubles d'après le lemme 2.5. Cela aboutit à une contradiction avec le lemme 8.16 où nous montrons (évidemment sans utiliser ce résultat) que les strates de la forme $\Omega^2 \mathcal{M}_1(2s' - 1, 2s' + 1; (-2^{2s'}))$ ne possèdent pas de différentielle avec résidu quadratique égal à un à tous les pôles.

Le second cas se traite de manière similaire. Si $a \geq 1$ nous utilisons le lemme 8.10 disant que les strates $\Omega^2 \mathcal{M}_1(2a - 1, 2a + 1; (-4^a))$ ne contiennent pas de différentielle quadratique dont les résidus quadratique sont $(0, \dots, 0)$. Si $a = 0$, nous utilisons le fait classique que la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_1(-1, 1)$ est vide. La contradiction s'obtient en considérant la différentielle entrelacée obtenue en collant ensemble les deux pôles doubles d'une différentielle de la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2a - 1, 2a + 1; (-4^a); (-2^2))$. \square

Lemme 5.2. *L'application résiduelle de la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2s + 1, 2s + 1; -4; (-2^{2s+1}))$ ne contient pas l'élément $(1; 1, \dots, 1)$ pour tout $s \geq 0$.*

Démonstration. Si dans une telle strate il existe une différentielle quadratique η possédant ces invariants, alors la proposition 2.8 implique qu'on peut supposer que η possède exactement $2s + 2$ liens-selles, tous horizontaux et reliant $2s + 2$ domaines polaires. Dans le graphe d'incidence défini dans la section 2.4, chaque feuille (sommet de valence 1) correspond à un domaine polaire bordé par un unique lien-selle de longueur 1. Comme les domaines polaires d'ordre 2 sont des cylindres de circonférence égale à 1, il s'ensuit que chaque feuille est collée à l'unique sommet correspondant au domaine polaire d'ordre 4. Le graphe est de genre 1 (car le nombre de sommets y est égal au nombre d'arêtes). Il est donc formé d'un cycle sur lequel peuvent se coller des arbres. Comme toutes les feuilles sont collées sur le même sommet, le cycle est formé de k domaines polaires d'ordre 2, tous de valence 2, dont les bords sont collés sur le domaine polaire d'ordre 4, sur lequel sont collés comme feuilles les $2s + 1 - k$ domaines polaires d'ordre 2 restants.

Les segments de bord du domaine polaire d'ordre 4 se positionnent de part et d'autre d'une cicatrice horizontale. Si k est un nombre impair, alors les deux bords de la chaîne de k domaines polaires ne peuvent être du même côté de la cicatrice (sinon l'holonomie la surface de translation est triviale et η n'est alors plus une différentielle primitive). De plus, les longueurs de ces deux liens-selles sont de somme 1. Comme les autres segments du bord du domaine polaire d'ordre quadruple sont de longueur 1 et que le résidu du pôle quadruple est 1, ces deux segments sont de longueur $1/2$. Il s'ensuit que sur les $2s + 1 - k$ feuilles, les nombre de celles qui sont d'un côté de la cicatrice ou de l'autre diffèrent de 1, ce qui indique que $2s + 1 - k$ est un nombre impair, ce qui est impossible puisque k et $2s + 1$ sont tous deux impairs.

Le nombre k de domaines de la chaîne est donc pair. Il s'ensuit que les deux bords de la chaîne de k domaines polaires (ou les deux segments identifiés si $k = 0$) doivent être du même côté de la cicatrice (sinon η n'est pas une différentielle primitive). Dans l'ordre cyclique des segments au bord du domaine polaire d'ordre 4, ces deux segments séparent les autres (les bords des domaines correspondant aux feuilles du graphe d'incidence) en deux familles, selon la singularité conique à leur bord. De plus, les deux angles de 2π aux extrémité sont portées par la même singularité A .

Comme les k domaines polaires contribuent de π aux deux singularités coniques et que celles-ci sont de même angle total, parmi les $2s + 1 - k$ feuilles il doit y avoir une domaine

de plus bordé par la singularité B que A . Or, d'un seul côté de la cicatrice vont se trouver tous les bords domaines bordés par B ainsi que les deux bords de la chaîne. La différence de longueurs entre les deux côté de la cicatrice est donc strictement plus grande que 1. Le résidu du pôle quadruple est donc distinct de 1. La différentielle η ne peut donc pas exister. \square

Lemme 5.3. *L'application résiduelle de la strate $\Omega^2\mathcal{M}_0(2a-1, 2a-1; (-4^a); -2)$ ne contient pas l'élément $(1, 0, \dots, 0; 1)$ pour tout $a \geq 1$.*

Démonstration. Si dans une telle strate il existe une différentielle quadratique η possédant ces résidus quadratiques, alors la proposition 2.8 implique qu'on peut supposer que η possède exactement $a+1$ liens-selles, tous horizontaux et reliant les $a+1$ domaines polaires.

Le graphe d'incidence de η admet au plus deux sommets de valence 1 correspondant aux pôles dont le résidu quadratique est non nul. Si le domaine polaire d'ordre 4 dont le résidu est 1 correspond à un sommet de valence 1, on peut, par chirurgie, transformer ce domaine en cylindre, réduisant de 2π l'angle à son bord. On obtient alors une différentielle de $\Omega^2\mathcal{M}_0(2a-1, 2a-3; (-4^{a-1}); -2, -2)$ de résidus $(0, \dots, 0, 1, 1)$, ce qui est interdit par le lemme 5.1. Donc ce domaine polaire n'est jamais de valence 1. Nous distinguons les cas selon si le domaine polaire d'ordre 2 est ou non de valence 1.

S'il ne l'est pas, alors le graphe d'incidence est un cycle et chaque sommet est de valence 2. Pour que la différentielle soit primitive, il est nécessaire que pour un nombre impair de sommets, les deux segments de bords soit orientés dans des directions différentes. Pour un domaine polaire d'ordre 2, ceci est automatique. Pour un domaine polaire d'ordre 4, cela signifie être de part et d'autre de la cicatrice. Comme cette propriété n'est valide que pour un nombre impair de sommets, elle ne l'est que pour le domaine polaire d'ordre 2. Les deux bords du domaine polaire d'ordre 4 dont le résidu est 1 ont des longueurs de la forme λ et $\lambda+1$. Les deux bords du domaine polaire d'ordre 2 somment à 1 tandis que pour les autres domaines, les deux bords sont de longueur égale (pour que le résidu soit nul). Ces conditions sont contradictoires.

Si le domaine du pôle double est de valence 1, alors le cycle du graphe d'incidence contient exactement un sommet de valence 3. On suppose d'abord que ce sommet de valence 3 correspond au domaine de pôle quadruple ayant un résidu non nul. Les sommets de valences 1 et 3 sont reliés par des domaines de pôle ayant des résidus nuls, donc par des liens-selles de longueur 1. Sur le bord du domaine correspondant au sommet de valence 3, il y a trois segments, deux donnant sur la chaîne formant le cycle (du même côté de la cicatrice sinon η n'est pas une différentielle primitive) et un donnant sur une chaîne vers le sommet de valence 1. Ce dernier lien-selle est de longueur 1 donc il est de l'autre côté de la cicatrice (sinon le résidu de ce pôle quadruple n'est pas 1). Sachant que chaque domaine polaire à résidu nul porte deux angles de magnitude 2π , ces conditions sont incompatibles avec le fait que les deux singularités coniques sont d'angle égal.

Si au contraire le sommet de valence 3 est de résidu nul, alors le segment donnant vers le sommet de valence 1 est de longueur 1 tandis que les deux autres sont attachés à une chaîne de domaines polaires. Dans cette chaîne, un sommet correspond à un domaine de pôle quadruple et de résidu 1 tandis que les autres sont des domaines de pôles quadruples à résidu nul (et dont les segments de bord sont de même longueur). Sur le sommet de valence 3, si les deux bords de la chaîne sont du même côté de la cicatrice, alors leurs longueurs sont de somme 1, alors que sur le domaine de la chaîne à résidu nul, ils seront de part et d'autre (pour que la différentielle soit primitive) et leurs longueurs vont avoir une différence de 1. Au contraire, si sur le sommet de valence 3, les deux bords de la chaîne sont de part et d'autre, leurs longueurs vont avoir une différence de 1 et sur le sommet spécial de la chaîne, ils seront du même côté de la cicatrice et devront sommer à 1. Tous les cas étant couverts, il s'ensuit que η ne peut exister. \square

5.2. Constructions. Dans cette section, nous montrons que si l'on est pas dans l'un des cas de la section 5.1, alors il existe une différentielle avec les résidus souhaitées dans les strates

$\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p; (-2^s))$. Nous considérons d'abord le cas des strates ayant un zéro d'ordre -1 .

Lemme 5.4. *Les applications résiduelles des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(-1, a; -2\ell_1, \dots, -2\ell_p; (-2^s))$ avec $\ell_1, \dots, \ell_p \geq 2$ et $s \geq 1$ sont surjectives.*

Démonstration. La démonstration est en partie similaire à celle du lemme 4.11. Nous supposons que les pôles non doubles dont le résidu quadratique est nul sont P_1, \dots, P_t et que les résidus R_{t+1}, \dots, R_p aux pôles P_{t+1}, \dots, P_p sont non nuls. De même, R_{p+1}, \dots, R_{p+s} sont les résidus quadratiques aux pôles doubles. Nous construisons une différentielle dont les résidus quadratiques sont (R_1, \dots, R_{p+s}) .

Pour chaque i , nous prenons une racine carrée r_i de R_i telle que $\Re(r_i) \geq 0$ et si $\Re(r_i) = 0$, alors $\Im(r_i) > 0$. Quitte à permuter les pôles, on peut supposer que $S = -r_1 + \sum_{i \geq 2} r_i$ est non nul. En effet, il suffit de choisir r_1 comme la racine de résidu quadratique dont la partie réelle est la plus petite. Dans ce cas, S ne peut être nul que si $p + s = 2$ et que r_1 et r_2 sont égaux. Dans ces cas, ces deux nombres sont non nuls (R_2 est le résidu quadratique d'un pôle double) et il suffit alors de remplacer r_1 par $-r_1$ (R_2). Nous définissons v_1 et v_2 deux vecteurs chacun égal à $\frac{S}{2}$.

On associe au pôle P_1 la partie polaire triviale d'ordre $2\ell_1$ associée à $(v_1, v_2; r_{t+1}, \dots, r_{p+s})$ si $R_1 = 0$ et la partie polaire non triviale associée à $(v_1, v_2; r_2, \dots, r_p)$ si $R_1 \neq 0$. L'angle au point d'intersection de v_1 et v_2 est π . On évite tout problème d'auto-intersection en réarrangeant les $v_1, v_2; r_2, \dots, r_p$ par argument croissant. Pour les autres pôles P_i , on prend une partie polaire associée à $(r_i; \emptyset)$ si $R_i \neq 0$ et $(r_{j_i}; r_{j_i})$ avec $j_i > t$ si $R_i = 0$. Il reste à identifier tous les segments par translation à exception des v_i que nous identifions par rotation d'angle π . Cette surface plate possède les résidus quadratiques adéquats. \square

Nous traitons maintenant le cas des strates ayant un unique pôle d'ordre -2 et un unique pôle d'ordre pair inférieur.

Lemme 5.5. *Les applications résiduelles des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -2\ell; -2)$ avec $\ell \geq 2$ sont surjectives sauf dans le cas $\Omega^2 \mathcal{M}_0(1, 1; -4, -2)$ où l'image de l'application résiduelle contient le complémentaire de $(1; 1)$.*

Démonstration. Nous commençons par le cas où $\ell = 2$. Les strates sont $\Omega^2 \mathcal{M}_0(-1, 3; -4, -2)$ et $\Omega^2 \mathcal{M}_0(1, 1; -4, -2)$. On note le résidu R , resp. R_1 , au pôle d'ordre -4 , resp. -2 . Quitte à multiplier les résidus par une constante, on peut supposer que $R_1 = 1$ et on considérera la racine $r_1 = 1$ de R_1 .

Dans le cas où $a_1 = -1$ et $a_2 = 3$, on associe au pôle d'ordre -4 la partie polaire d'ordre 4 associée à $(v_1, v_2; r_1)$ telle que $v_1 = v_2$ et $v_1 + v_2 - r_1$ est égale à une racine de R dont la partie réelle est positive. On colle alors au segment r_1 une partie polaire d'ordre 2 associée à r_1 , puis les v_i l'un sur l'autre. La surface obtenue vérifie clairement les propriétés souhaitées.

Dans le cas où $a_1 = a_2 = 1$ la construction est la suivante. Si $|R| > 1$ on considère la partie polaire d'ordre 4 associée à $(\emptyset; v_1, r_1, v_2)$ telle que $v_1 = v_2$ et la somme est une racine de R de partie réelle positive. On colle alors au segment r_1 une partie polaire d'ordre 2 associée à r_1 puis les v_i l'un sur l'autre. La surface obtenue vérifie clairement les propriétés souhaitées.

Si $|R| \leq 1$, on considère la partie polaire d'ordre 2 associée à (v_1, v_2) avec $v_1 + v_2 = 1$ et $v_2 - v_1$ est une racine r de R . Comme la solution de ces équations est donnée par $v_1 = \frac{1}{2}(r - 1)$, on peut choisir r telle que v_1 est de partie imaginaire strictement négative ou dans le segment $]0, 1[$ sauf dans le cas exceptionnel $R = 1$. On considère maintenant la partie polaire d'ordre 4 associée à $(v_2; v_1)$. En collant les v_1 ensemble puis les v_2 ensemble par rotations et translations, on obtient une surface plate ayant les invariants souhaités.

Nous traitons maintenant le cas où $\ell \geq 3$. On part d'une surface plate ayant les résidus souhaités dans la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a'_1, a'_2; -4; -2)$ telle que $a_i = a'_i + 2l'_i$ avec $l'_i \geq 0$. On coupe alors une demi-droite partant du zéro d'ordre a'_i et on colle de manière cyclique l'_i plans possédant la même fente. \square

Nous déterminons maintenant l'image de l'application résiduelle des strates de la forme $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -2\ell; -2, -2)$.

Lemme 5.6. *L'image de l'application résiduelle de la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(1, 3; -4; -2, -2)$ contient $\mathcal{R}_0^k(1, 3; -4; -2, -2) \setminus \mathbb{C}^* \cdot (0; 1, 1)$. Les applications résiduelles des autres strates de la forme $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -2\ell; -2, -2)$ sont surjectives pour tout $\ell \geq 2$.*

Démonstration. Nous commençons par traiter le cas $\ell = 2$. On prend des racines r_i des R_i et r de R de partie réelle positive et si celle-ci est nulle de partie imaginaire positive. Dans le cas où l'un des zéros d'ordre -1 , on considère v tel que $2v = r_1 + r_2 + r$. On considère la partie polaire d'ordre 4 associée à $(r_1, r_2; v, v)$. On colle les cylindres de circonférences r_i et les deux vecteurs v entre eux pour obtenir la différentielle avec les invariants souhaités. Dans le cas où l'un des zéros d'ordre 1, on suppose que $|r_1| \geq |r_2|$ et on considère v tel que $2v = r_1 + r - r_2$. Notons que comme les résidus sont non proportionnels à $(0; 1, 1)$, le vecteur v est non nul et de partie réelle positive. On considère alors la partie polaire d'ordre 4 associée à $(r_1; v, r_2, v)$. La différentielle est obtenue comme précédemment.

La surjectivité des applications résiduelles $\mathcal{R}_0^2(a_1, a_2; -2\ell; -2, -2)$ avec $\ell \geq 3$ se montre de la façon suivante. On part des surfaces obtenues aux paragraphes précédents et on ajoute des multiples de 2 aux zéros de ces strates. Pour cela on coupe ces surfaces le long de demi-droites infinies partant des singularités et on recolle $\ell - 2$ plans de manière à obtenir les ordres souhaités. De cette façon on obtient toutes les différentielles sauf celle qui possède les résidus proportionnels à $(0; -1, -1)$ dans $\Omega^2 \mathcal{M}_0(3, 3; -6; -2, -2)$. Une telle différentielle est représentée dans la figure 13. \square



FIGURE 13. Différentielle dans $\Omega^2 \mathcal{M}_0(3, 3; -6; -2, -2)$ dont les résidus sont $(0; 1, 1)$

Nous considérons maintenant le cas des strates ayant un unique pôle d'ordre -2ℓ et un nombre arbitraire de pôles d'ordre -2 .

Lemme 5.7. *L'application résiduelle des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -2\ell; (-2^s))$ avec $s \geq 3$ distinctes des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2s' - 1; 2s' + 1; -4; (-2^{2s'}))$ avec $s = 2s'$ et $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2s' + 1; 2s' + 1; -4; (-2^{2s'+1}))$ avec $s = 2s' + 1$ sont surjectives.*

L'image de l'application résiduelle de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2s' - 1; 2s' + 1; -4; (-2^{2s'}))$ contient le complémentaire de $\mathbb{C}^ \cdot (0; 1, \dots, 1)$ dans l'espace résiduel et celle de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2s' + 1; 2s' + 1; -4; (-2^{2s'+1}))$ contient le complémentaire de $\mathbb{C}^* \cdot (1; 1, \dots, 1)$.*

Démonstration. Commençons par le cas $\ell = 2$. Rappelons que $a_i = 2l_i - 1$ avec $l_1 + l_2 = s + 1$ et $a_1 \leq a_2$.

On partitionne les résidus en deux ensembles $S_1 \sqcup S_2$ de cardinaux respectifs l_1 et $l_2 - 1$ satisfaisant aux conditions suivantes. Nous supposons que les résidus R_i correspondent aux pôles de S_1 pour $i \leq l_1$ et de S_2 sinon. Nous noterons r_j la racine de partie réelle positive de R_j (et de partie imaginaire positive si la partie réelle est nulle) et \tilde{r}_i la somme des r_j appartenant à S_i .

Nous montrons qu'il existe une partition $S_1 \sqcup S_2$ comme ci-dessus tel que $|\tilde{r}_1| < \tilde{r}_2$, sauf si $a_1 = a_2 - 2$ et tous les résidus sont égaux entre eux. En effet, considérons le maximum m_i de la somme de i racines de résidus r_j . Clairement, on a $0 < m_1 < m_2 < \dots < m_s$. Si $|S_1| < |S_2|$ ou si $|S_1| = |S_2|$ et que tous les résidus ne sont pas égaux entre eux, alors il suffit de considérer la partition telle que S_2 contient les r_j qui réalise le maximum m_{l_2-1} .

Nous considérons alors la partie polaire d'ordre 4 associée à $(v, \tilde{r}_1, v, \tilde{r}_2)$, avec v tel que $2v + \tilde{r}_1 - \tilde{r}_2 = r$. On ajoute deux polygones dont les arêtes sont respectivement $(\tilde{r}_1, -r_1, \dots, -r_{l_1})$ et $(-\sum_{i=l_1+1}^s r_i, r_{l_1+1}, \dots, r_s)$ que l'on colle à la partie polaire. Enfin, on identifie les segments v par rotation (et translation) et on colle des demi-cylindres infinis aux autres segments. \square

Enfin nous traitons le cas général avec deux zéros.

Lemme 5.8. *Les applications résiduelles des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -2\ell_1, \dots, -2\ell_p; (-2^s))$ avec $p \geq 2$ et $s \neq 0$ distinctes de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2a-1; 2a+1; (-4^a); (-2^2))$ et $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2a-1, 2a-1; (-4^a); -2)$ sont surjectives.*

L'image de l'application résiduelle de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2a-1; 2a+1; (-4^a); (-2^2))$ contient le complémentaire de $\mathbf{C}^ \cdot (0, \dots, 0; 1, 1)$ dans l'espace résiduel et celle de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2a-1, 2a-1; (-4^a); -2)$ contient le complémentaire de $\mathbf{C}^* \cdot (1, 0, \dots, 0; 1)$.*

Démonstration. Nous allons séparer la preuve en trois parties selon l'existence ou non de pôles d'ordres $-2\ell_i$ dont les résidus sont nuls. Rappelons la notation usuelle $a_i = 2\ell_i - 1$, avec $a_1 \leq a_2$. De plus, r_i est la racine carrée de partie réelle positive (et de partie imaginaire positive si la partie réelle est nulle) du résidu R_i .

Tous les résidus aux pôles d'ordres $-2\ell_i$ sont nuls. Considérons tout d'abord le cas des différentielles de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2a+2s-1, 2a+2s-3; (-4^a); (-2^{2s}))$ avec $a, s \geq 2$ et dont les résidus sont $(0, \dots, 0; 1, \dots, 1)$. On prend une partie polaire d'ordre 4 associée aux vecteurs $((1^{s+1}); (1^{s+1}))$. Les autres parties polaires d'ordres 4 sont associées à $(1; 1)$. On colle $s+1$ cylindres aux segments en haut de la partie polaire d'ordre 4. On colle le segment supérieur d'une partie polaire d'ordre 4 à un segment inférieur qui n'est ni l'initial ni le final. Puis on colle les autres domaines d'ordre 4 de manière cyclique au segment initial. On colle alors le dernier segment de ces domaines au segment final du domaine polaire d'ordre 4 spécial. Enfin on colle des cylindres aux segments restant. Par construction la différentielle ainsi formée possède les invariants souhaités.

Dans les autres cas, considérons une partition $S_1 \cup S_2$ des pôles doubles satisfaisant les propriétés suivantes. Quitte à changer la numérotation, on supposera que les $|S_1|$ premiers pôles appartiennent à S_1 et on note \tilde{r}_i la somme des racines r_j pour les pôles appartenant à S_i . La partition satisfait $|S_i| \leq l_i$ et $|S_1| > 0$ si $a_1 \geq 0$. De plus, $|\tilde{r}_1| \leq |\tilde{r}_2|$ et $\tilde{r}_1 \neq \tilde{r}_2$. Cela est possible sauf dans les cas considérés au paragraphe précédent. On définit alors le vecteur v tel que $2v + \tilde{r}_1 = \tilde{r}_2$. Considérons pour l'un des pôles d'ordre ≤ -4 la partie polaire associée à $(v, r_1, \dots, r_{|S_1|}, v; r_{|S_1|+1}, \dots, r_s)$. Les autres pôles d'ordres $-2\ell_i$ sont répartis en trois ensembles selon qu'ils contribuent aux deux zéros ou à l'un des zéros de sorte que l'on obtient les ordres souhaités. Pour les pôles qui contribuent aux deux zéros, on considère la partie polaire associée à $(v; v)$. Pour les autres, on considère celles associées à $(r_j; r_j)$, où j est inférieur ou égal à $|S_1|$ si le pôle contribue à a_1 et j est strictement supérieur à $|S_1|$ sinon. On obtient la différentielle souhaitée en collant les parties polaires associées à $(v; v)$ cycliquement aux vecteurs v de la partie polaire spéciale. Les parties polaires associées à $(r_j; r_j)$ sont collées aux vecteurs correspondant de manière cyclique. Pour terminer la construction, on colle les cylindres de circonférences r_j .

Tous les résidus aux pôles d'ordres $-2\ell_i$ sont non nuls. La construction est similaire à la seconde partie de la preuve du lemme 4.12. On commence par le cas des strates où les $b_i = 4$. Supposons que $a_1 = -1$, il suffit de considérer une partie polaire associée à $(r_2, \dots, r_{p+s}; v, v)$ telle qu'elle correspond à un résidu de racine r_1 . Puis on colle les parties polaires associées à $(r_i; \emptyset)$ et les segments v ensemble pour obtenir la différentielle souhaitée. Dans le cas où $a_1 = 1$, on sépare deux cas. Supposons qu'il existe un pôle d'ordre -2 telle que la norme de r_i est strictement inférieure à la norme de la somme des autres r_j . Dans ce cas, on fait la construction précédente en intercalant r_i entre les deux v . S'il n'existe pas un tel pôle, alors il existe un unique pôle d'ordre -2 . On considère alors les parties polaires d'ordre 4 associées à $(v_1; v_2)$, $(v_2; v_3)$, jusqu'à $(v, v_p, v; \emptyset)$, telles que v_1 est la racine du résidu

au pôle d'ordre -2 et la somme des autres segments est égale à r_j . On colle alors un cylindre à v_1 et les segments de même nom ensemble pour obtenir la différentielle souhaitée.

Dans les cas où $a_1 \geq 3$, on partitionne les pôles d'ordres -2 en deux ensembles S_i de cardinaux t_i et on considère un ensemble S_0 de cardinal $\alpha \leq \ell - 2$ de pôles d'ordre -4 tel que $a_1 - 2t_1 + 2 = a_2 - 2t_2 - 4\alpha$. On note \widetilde{r}_1 la somme des racines r_j pour $j \in S_1$ et \widetilde{r}_2 la somme des racines r_j pour $j \in S_2 \cup S_0$. On concatène les r_j pour S_1 et $S_2 \cup S_0$ respectivement par argument décroissant et on forme un polygone en reliant le point initial au point final par le segment \widetilde{r}_i . On colle à chaque polygone les parties polaires d'ordres 4 et 2 associées aux $(r_j; \emptyset)$. Pour les autres pôles, on considère les parties polaires d'ordre 4 dont les bords respectifs sont les segments $(v, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v, v_t)$ de telle sorte que la somme des vecteurs au bord de chaque partie polaire est le résidu du pôle correspondant sauf dans deux cas où on enlève \widetilde{r}_i à ce résidu. On pourra se reporter à la figure 11 pour une illustration. On suppose de plus que dans ces deux domaines polaires, le zéro d'ordre a_i correspond aux points extrémaux des segments. On place alors le segment \widetilde{r}_i au bord cette partie polaire à partir d'un sommet correspondant au zéro d'ordre a_i . En choisissant soit le sommet de gauche ou de droite, on peut s'assurer que le bord de la partie polaire ne possède pas de points d'auto-intersection. On conclut la construction en collant les segments de même nom ensemble.

Enfinement, il reste à considérer le cas où les pôles sont d'ordres $-2\ell_i$. Dans ce cas, fait les constructions précédentes. Puis on coupe les surfaces plates associées aux différentielles et on colle de manière cyclique des plans afin d'obtenir les invariants souhaités.

Certains résidus aux pôles d'ordres $-2\ell_i$ sont nuls. Supposons maintenant qu'il existe des pôles dont les résidus sont non nuls et d'autres nuls. Il suffit d'enlever les pôles de résidus nuls afin de se ramener au cas où tous les résidus sont non nuls. Cela permet d'obtenir les invariants souhaités sauf dans le cas des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2a + 2s - 1, 2a + 2s - 1; (-4^a), (-2^{2s+1}))$ avec $a \geq 2, s \geq 1$ et les résidus quadratiques sont de la forme $(1, 0, \dots, 0; 1, \dots, 1)$. Dans ce cas, la construction est la suivante. On considère la partie polaire d'ordre 4 associée aux vecteurs $((1^{s+2}); (1^{s+1}))$. Pour tous les autres pôles d'ordre -4 , on associe la partie polaire associée à $(1; 1)$. À un segment en bas de la cicatrice on colle un segment d'une autre partie polaire d'ordre 4. Puis on colle les cylindres à tous les segments à l'exception du premier et du dernier du demi-plan supérieur. On colle alors de manière cyclique les parties polaires d'ordre 4 à ces segments puis on identifie les deux segments non identifiés par rotation. On vérifie facilement que la différentielle quadratique ainsi formée possède les invariants souhaités. \square

Afin de traiter le cas des strates avec $n \geq 3$ zéros, nous réalisons tout d'abord certains cas exceptionnels.

Lemme 5.9. *L'image de l'application résiduelle des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2s' - 1, 2s' - 1, 2; -4; (-2^{2s'}))$ pour $s' \geq 1$ et $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2a - 1, 2a - 1, 2; (-4^a); (-2^2))$ pour $a \geq 0$ contiennent respectivement $(0; 1, \dots, 1)$ et $(0, \dots, 0; 1, 1)$.*

Démonstration. Pour les strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2s' - 1, 2s' - 1, 2; -4; (-2^{2s'}))$ on procède à la construction suivante. Soit $v \in \mathbb{C}^*$, on associe aux pôles d'ordres -2 les parties polaires d'ordre 2 associées à (v) . Pour le pôle d'ordre -4 , on associe la partie polaire d'ordre 4 associée à $((v^{s'+2}); (v^{s'+2}))$. La différentielle est obtenue en collant par rotation d'angle π les premiers vecteur v de la partie polaire d'ordre 4 aux derniers et les autres aux bords des parties polaires d'ordre 2. Cette construction est représentée à gauche de la figure 14.

Pour les strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2a - 1, 2a - 1, 2; (-4^a); (-2^2))$ on considère deux cas selon la parité de a . Si a est impair, on note v l'holonomie des liens-selles v_1 et v_2 labellisés par 1 et 2 dans la différentielle η représentée à gauche de la figure 14. On associe à $a - 1$ pôles d'ordre -4 la partie polaire d'ordre 4 associée à $(v; v)$. Puis, on coupe η le long des liens-selles v_1 et v_2 . Puis on colle cycliquement par translation $(a - 1)/2$ des parties polaires, respectivement aux

segments obtenus en coupant les liens-selles v_1 et v_2 . Si a est pair, on procède de manière similaire en partant de la différentielle à droite de la figure 14.

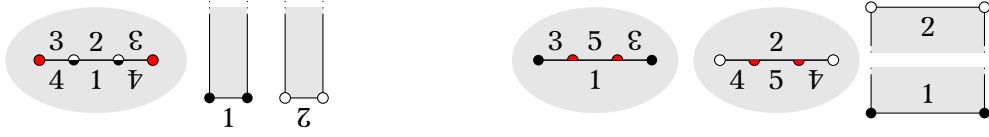


FIGURE 14. Différentielles dans les strates $\Omega^2\mathcal{M}_0(1, 1, 2; -4; -2, -2)$ (à gauche) et $\Omega^2\mathcal{M}_0(3, 3, 2; -4, -4; -2, -2)$ (à droite) dont les résidus sont respectivement $(0; 1, 1)$ et $(0, 0; 1, 1)$.

□

Il est maintenant possible de terminer la preuve du théorème 1.6 avec les strates vérifiant $n \geq 3$. Notons que ce dernier lemme inclut le cas où plus de deux zéros sont d'ordre impair.

Lemme 5.10. *L'application résiduelle des strates $\Omega^2\mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -2\ell_1, \dots, -2\ell_p; (-2^s))$ avec $s \geq 1$ est surjective pour $n \geq 3$.*

Démonstration. Nous traitons d'abord le cas $n = 3$. Pour de telles strates, il y a exactement deux zéros d'ordre impair et un zéro d'ordre pair. La preuve se fait essentiellement par éclatement de zéros à partir de strates pour lesquelles $n = 2$ (avec deux zéros d'ordre impair). Les différentielles quadratiques de ces strates sont primitives, on peut donc éclater l'un de leurs zéros en un zéro d'ordre pair et un zéro d'ordre impair. On obtient ainsi toutes les strates vérifiant $n = 3$ sans modifier les résidus.

Pour les strates avec deux zéros, on a montré que l'application résiduelle est surjective, sauf les quatre familles de strates décrites dans la section 5.1. Il s'ensuit que pour les strates vérifiant $n = 3$, on peut obtenir toutes les configurations de résidus par éclatement d'un zéro d'ordre impair sauf dans les deux familles suivantes :

- i) La configuration $(0; 1, \dots, 1)$ dans les strates $\Omega^2\mathcal{M}_0(2s' - 1, 2s' - 1, 2; -4; (-2^{2s'}))$ avec $s' \geq 1$.
- ii) La configuration $(0, \dots, 0; 1, 1)$ dans les strates $\Omega^2\mathcal{M}_0(2a - 1, 2a - 1, 2; (-4^a); (-2^{2a}))$ avec $a \geq 0$.

Pour ces deux familles, les constructions qui donnent les résidus souhaités sont données dans le lemme 5.9.

Enfin, pour toute strate vérifiant $n \geq 4$ et telle que a_1 et a_2 sont impairs, la surjectivité de l'application résiduelle s'obtient en partant de la strate ayant les mêmes ordres de pôles et pour laquelle les ordres des zéros sont a_1, a_2 et $\sum_{i=3}^n a_i$. En éclatant le zéro pair, on peut réaliser toutes les configurations dans la strate voulue. □

6. DIFFÉRENTIELLES DONT LES PÔLES SONT DOUBLES

Ce cas est, comme dans le cas abélien [GT21a, section 3.3], subtil. Dans les strates ayant un unique zéro, toutes les singularités ont un ordre pair. Elles ne sont donc pas primitives (lemme 2.1). Nous considérerons les strates avec $n \geq 2$ zéros, dont au moins deux sont impairs. Nous commencerons par établir les différentes obstructions dans les sections 6.1, 6.2 et 6.3. Les constructions sont données dans la section 6.4 si les résidus ne sont pas sur le même rayon et la section 6.5 s'ils sont sur le même rayon.

6.1. Obstruction des configurations triangulaires. Rappelons que trois nombres sont triangulaires s'ils sont les carrés de nombres de somme nulle (voir définition 1.8).

Lemme 6.1. *L'image par l'application résiduelle des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2s' - 1, 2s' - 1; (-2^{2s'+1}))$ avec $s' \geq 1$ ne contient pas les résidus quadratiques de la forme $(R_1, \dots, R_1, R_2, R_3)$ où R_1, R_2, R_3 sont triangulaires.*

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe une différentielle quadratique ξ dans $\Omega^2 \mathcal{M}_0(1, 1; (-2^3))$ avec des résidus quadratiques formant une configuration triangulaire. On a alors

$$\xi = \frac{z}{(z-1)^2(z-a)^2(z-b)^2} (dz)^2,$$

avec $a \neq b \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ et

$$R_1 = \frac{1}{(1-a)^2(1-b)^2}, \quad R_2 = \frac{a}{(1-a)^2(a-b)^2}, \quad \text{et} \quad R_3 = \frac{b}{(1-b)^2(a-b)^2}.$$

En notant par α et β une racine de a et b respectivement, la condition triangulaire donne

$$\pm(\alpha^2 - \beta^2) \pm \alpha(\beta - 1) \pm \beta(\alpha - 1) = 0.$$

Un calcul élémentaire montre que cette équation est équivalente à

$$\pm(\alpha \pm \beta)(\beta \pm 1)(1 \pm \alpha) = 0.$$

On en déduit que $a = b$ ou $a = 1$ ou $b = 1$ ce qui n'est pas permis.

Supposons qu'il existe une différentielle quadratique de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2s' - 1, 2s' - 1; (-2^{2s'+1}))$ avec $s' \geq 2$ dont les résidus sont $((R_1^{2s'-1}), R_2, R_3)$. Il existe deux cas de figure (modulo multiplication de toutes les racines par -1) selon que :

- on a les racines r_2 et r_3 ,
- on a les racines r_2 et $-r_3$,

avec la condition $r_1 + r_2 + r_3 = 0$.

Dans le premier cas, on choisit aussi a^+ racines r_1 et a^- racines $-r_1$. On a aussi deux vecteurs v tels que

$$r_2 + r_3 + a^+ r_1 - a^- r_1 + 2v = 0.$$

La différentielle quadratique est obtenue en concaténant tous ces vecteurs et en identifiant par rotation les deux vecteurs v et des demi-cylindres infinis aux autres vecteurs. On déduit de l'égalité précédente que $v = \frac{a^- - a^+ + 1}{2} r_1$. En particulier, le vecteur v est proportionnel à r_1 . Donc la concaténation est de la forme $r_2, -r_1, \dots, -r_1, r_3, v, r_1, \dots, r_1, v$ ou $r_2, v, -r_1, \dots, -r_1, v, r_3, r_1, \dots, r_1$. Pour que la différentielle soit dans la strate considérée, il faut que $a^+ = s'$ dans le premier cas et $a^- = s'$ dans le second cas. Donc dans le premier cas, on a $v = 0$, ce qui implique que la différentielle est dégénérée. Dans le second cas, on a $v = r_1$ et on voit que la différentielle quadratique ainsi obtenue est dégénérée.

Dans le second cas, les vecteurs v satisfont à l'équation

$$r_2 - r_3 + a^+ r_1 - a^- r_1 + 2v = 0.$$

De cette équation on déduit que $v = \frac{a^- - a^+ - 1}{2} r_1 - r_2$. La concaténation des vecteurs est de la forme $r_2 - r_3, -r_1, \dots, -r_1, v, -r_1, \dots, -r_1, v, r_1, \dots, r_1$ car sinon la concaténation serait dégénérée. On peut vérifier que dans le cas précédent on a s' vecteurs $-r_1$ entre les deux vecteurs v . On en déduit (en allant dans le sens contraire de la concaténation donnée) que le point après le premier v est $a^+ - \frac{s - a^+ - 1}{2} r_1 + r_2 - s'$. Comme $a^+ \leq s - 1$ on en déduit que ce point est donné par $r_2 - \alpha r_1$ avec α strictement positif. On en déduit immédiatement que le polygone est dégénéré et donc que la différentielle quadratique ne peut pas exister. \square

Ceci établit l'obstruction du point (ii) dans le théorème 1.9.

6.2. Obstruction des configurations en crose. Il existe une autre famille de strates exceptionnelles pour laquelle certaines configurations à deux paramètres ne sont pas réalisables. Ces configurations sont les suivantes.

Définition 6.2. Les s -uplets proportionnels à $(1, \dots, 1, R, R)$ avec $R \in \mathbf{C}^*$ sont *en crose*.

Muni de cette notion, nous allons énoncer le résultat suivant qui établit l'obstruction du point (i) dans le théorème 1.9.

Lemme 6.3. *L'image de l'application résiduelle des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2s' - 1, 2s' + 1; (-2^{2s'+2}))$ ne contient pas les résidus en crose.*

Démonstration. Supposons qu'il existe une différentielle dans $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2s - 1, 2s + 1; (-2^{2s'+2}))$ dont les résidus quadratiques sont $(1, \dots, 1, R, R)$. On obtient une différentielle quadratique entrelacée lissable en collant les deux pôles ayant pour résidu quadratique R . De plus, cette différentielle est lissable sans modifier les autres résidus (voir lemme 2.4). On obtient donc une différentielle dans la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_1(2s' - 1, 2s' + 1; (-2^{2s'}))$ dont les résidus quadratiques sont $(1, \dots, 1)$. Or nous montrerons qu'une telle différentielle quadratique n'existe pas dans le lemme 8.16, ce qui donne une contradiction. \square

6.3. Obstructions arithmétiques. On commence par introduire la définition d'un s -uplet arithmétique.

Définition 6.4. Un s -uplet $(R_1, \dots, R_s) \in \mathbf{N}^s$ est *arithmétique* si $R_i = r_i^2$ avec $r_i \in \mathbf{N}$ premiers entre eux.

Il existe deux obstructions distinctes concernant les configurations arithmétiques selon si la somme des racines r_i est paire ou impaire. Ces obstructions sont les inégalités (1.4) et (1.5) du théorème 1.9. La fin de cette section est dédiée à la preuve de la nécessité de ces conditions.

Pour commencer, notons qu'une différentielle quadratique ξ avec deux singularités d'ordres $a_1 \leq a_2$ et s pôles doubles possède exactement s liens-selles. Le graphe d'incidence (voir section 2.4) possède donc s sommets et s arêtes. Ce graphe est donc un cycle qui possède éventuellement un arbre à chaque sommet.

Lemme 6.5. *Soit ξ une différentielle de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2, (-2^s))$ dont les résidus sont une configuration arithmétique (R_1, \dots, R_s) .*

- Si la somme $\sum r_i$ est paire, alors les longueurs des liens-selles de ξ sont entières.
- Si la somme $\sum r_i$ est impaire, alors les longueurs des liens-selles du cycle sont demi-entières et celles des liens-selles des arbres sont entières.

Démonstration. L'holonomie d'un lien-selle correspondant à une arête d'un arbre est une somme de racines des résidus. Sa longueur est donc un entier strictement positif. Considérons les liens-selles correspondant aux arêtes du cycle. Rappelons que ξ est obtenue en collant par translations et éventuellement rotation d'angle π les segments au bord de cylindres. Quitte à faire une rotation aux cylindres, on peut supposer qu'exactly un lien-selle du cycle est obtenu en collant par rotation deux segments. La somme de ces segments avec les longueurs de liens-selles est un entier de même parité que la somme des r_i . On en déduit que les longueurs de ce lien-selle puis de tous les liens-selles du cycle sont demi-entières dans le cas où la somme est impaire et sont entières dans le cas où la somme est paire. \square

Ce résultat implique que les inégalités (1.4) et (1.5) du théorème 1.9 sont nécessaires dans le cas $n = 2$.

Corollaire 6.6. *Soit ξ une différentielle de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2, (-2^s))$ avec $a_1 \leq a_2$ impairs dont les résidus (R_1, \dots, R_s) sont arithmétiques.*

- Si $\sum r_i$ est impaire, alors $\sum r_i \geq a_2 + 2$.

– Si $\sum r_i$ est paire, alors $\sum r_i \geq a_1 + a_2 + 4$.

Démonstration. Supposons que $\sum r_i$ est impaire. Parmi les s liens-selles de ξ , il existe un entier $c \geq 0$ tel que $1 + 2c$ liens-selles sont de longueurs demi-entières et les autres sont de longueurs entières. Par hypothèse, $1 + 2c \leq a_1 + 2$. Donc la somme des longueurs des s liens-selles est supérieure ou égale à $(a_1 + 2) + 2(s - a_1 - 2) = 2s - a_1 - 2 = a_2 + 2$.

Supposons que $\sum r_i$ est paire. Les s liens-selles de ξ sont de longueurs entières donc supérieures ou égales à 1. La somme des circonférences des cylindres correspondant au pôles doubles est donc au moins $2s = a_1 + a_2 + 4$. \square

On en déduit le cas où la différentielle possède des zéros d'ordres pairs.

Corollaire 6.7. *Soit une différentielle ξ de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2, 2l_3, \dots, 2l_n; (-2^s))$ avec a_1, a_2 impairs et $l_3, \dots, l_n \geq 1$ dont les résidus (R_1, \dots, R_s) sont arithmétiques.*

– Si la somme $\sum r_i$ est impaire, alors elle est supérieure ou égale à $a_2 + 2$.

– Si la somme $\sum r_i$ est paire, alors elle est supérieure ou égale à $a_1 + a_2 + 4$.

Démonstration. Dans les deux cas, le revêtement canonique de ξ est une différentielle abélienne méromorphe ω de genre zéro. Le flot horizontal dans la surface plate associée à ω n'admet que des liens-selles et des trajectoires périodiques. En perturbant un peu les périodes relatives des zéros sur ξ , on obtient une surface qui se décompose en cylindres finis et infinis de circonférences réelles. Tous les liens-selles horizontaux qui contiennent au moins un zéro pair sont fermés.

Considérons un cylindre tel que lorsque l'on coupe le long d'une circonférence on obtient deux composantes, dont l'une contient un unique zéro, pair. Dans ce cas, la parité de la circonférence du cylindre est la parité de la somme des racines positives des résidus des pôles de la composante. Successivement, on en déduit que la parité de la somme des circonférences des cylindres attachés aux liens-selles entre les deux zéros impairs est égale à la parité de la somme des racines positives des résidus. Elle est donc impaire si r_i est impaire et pair si r_i est paire.

D'après le corollaire 6.6, cela signifie que la somme des circonférences des cylindres attachés aux liens-selles entre les deux zéros impairs est supérieure ou égale à $a_2 + 2$ si la somme est impaire et $a_1 + a_2 + 4$ si cette somme est paire. La circonférence de chaque cylindre fini est la somme des circonférence des cylindres infinis de la composante correspondante. Par conséquent, on obtient l'inégalité souhaitée sur l'ensemble des racines des résidus. \square

6.4. Les résidus ne sont pas sur un même rayon. Nous allons prouver qu'en dehors des obstructions précédemment établies, les configurations de résidus quadratiques qui ne sont pas tous sur un même rayon sont réalisables en construisant les différentielles quadratiques dans les strates adéquates.

Nous présentons tout d'abord un procédé général de construction de différentielles quadratiques dans $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-2^s))$. Rappelons que nous avons $a_i = 2l_i - 1$ avec $l_1 \leq l_2$. Nous notons S la surface plate associée à une différentielle quadratique ξ de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(\mu)$ dont les résidus quadratiques sont (R_1, \dots, R_s) .

La construction (CC). Soit $E = (r_1, \dots, r_s)$ un s -uplet formé de racines carrées des R_i , on va construire \mathcal{G} un $s + 2$ -gone qui a pour arêtes les r_i et deux vecteurs non nuls v_1, v_2 avec $v_2 = v_1$. Les arêtes v_i partitionnent les r_i en deux uplets E_1 et E_2 de cardinaux respectifs $e_i \in \{0, \dots, s\}$. Par définition le polygone \mathcal{G} est la concaténation de $v_1, r_1, \dots, r_{e_1}, v_2, r_{e_1+1}, \dots, r_s$ dans cet ordre (si $e_1 = 0$, alors v_2 suit directement v_1). Enfin nous supposons que le vecteur normal n_{v_1} à v_1 pointant vers l'extérieur de \mathcal{G} est tel que (n_{v_1}, v_1) forme une base directe. Nous supposons que la condition suivante est satisfaite.

(CC) On a $e_1 = l_1$ et $e_2 = l_2 + 1$ et $|\sum_{i=1}^{e_1} r_i| > |\sum_{i=e_1+1}^{e_2} r_i|$.

La *construction* (CC) désigne le fait de prendre un polygone de type (CC) et de former la différentielle quadratique en collant les deux segments v_i par rotation et des demi-cylindres infinis aux segments r_i . La différentielle quadratique ainsi obtenue est de type μ et que les résidus quadratiques aux pôles d'ordre -2 sont les R_i . Cette construction est présentée dans la figure 15, où les segments v_i sont tracés normalement, les r_i sont en segments hachés et les demi-cylindres sont en pointillés.

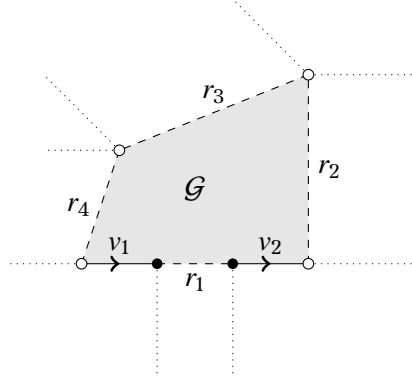


FIGURE 15. La construction (CC) illustrée dans le cas de la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(1, 3; (-2^4))$

Cette construction n'est pas la seule permettant d'obtenir de telles différentielles quadratiques. Toutefois, elle fournit la majorité de celles-ci dans le cas où les résidus quadratiques ne sont pas sur le même rayon.

La construction des différentielles. Munis de la construction (CC), nous allons montrer le résultat suivant.

Lemme 6.8. Soit $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-2^s))$ une strate quadratique avec a_1, a_2 impair. L'image par l'application résiduelle de cette strate contient tous les s -uplets dont les éléments n'appartiennent pas à un même rayon issu de l'origine, à l'exception de ceux donnés dans les lemmes 6.1 et 6.3.

Démonstration. Rappelons la notation $a_i = 2l_i - 1$ avec $l_1 \leq l_2$. L'idée de la preuve est de partitionner les pôles en deux sous-ensembles de cardinal l_1 et $l_2 + 1$ respectivement afin d'obtenir les différentielles quadratiques souhaitées par la construction (CC).

Les résidus en crose. On commence par le cas des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-2^s))$ avec $(a_1, a_2) \neq (2s' - 1, 2s' + 1)$ si $s = 2s' + 2$ et des résidus quadratiques $(1, \dots, 1, R, R)$ où $R \notin \mathbf{R}_+$. Soit r une racine carrée de R , on note $v = 2r + l_2 - l_1 - 1$. On construit un polygone en concaténant les deux segments r puis $l_2 - 1$ segments 1 puis le vecteur $-v/2$ puis l_1 segments -1 en enfin le segment $-v/2$. Ce polygone est représenté à gauche de la figure 16 pour la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(1, 7; (-2^6))$. Notons que le point du polygone avant de concaténer le dernier vecteur égal à $-v/2$ est de coordonnées $((l_2 - l_1 - 1)/2, 1)$ dans la base $(1, r)$ de \mathbf{R}^2 . Il est clair que le polygone est non dégénéré si et seulement si $l_2 - l_1 - 1 > 0$, i.e. si $(a_1, a_2) \neq (2s' - 1, 2s' + 1)$. Dans ce cas, la construction (CC) à partir de ce polygone donne la différentielle quadratique avec les invariants souhaités.

Les résidus sont de la forme $((1^{s_1}), (R^{s_2}))$. Prenons un s -uplet de la forme $((1^{s_1}), (R^{s_2}))$ avec $R \notin \mathbf{R}_+$, tel que soit $s_2 = 1$, soit $s_i \geq 3$ pour $i = 1, 2$. On construit une différentielle dans $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-2^s))$ ayant ces résidus quadratiques.

Dans le cas où $s_1 = 1$, il suffit de faire la construction du paragraphe précédent avec un unique r . Notons que si $a_1 = a_2 = s/2 - 2$, alors le polygone est dégénéré. En effet, le sommet avant la concaténation du deuxième segment $-v/2$ est au milieu du segment r . Donc le second segment $-v/2$ coïncide avec la première moitié du segment r . Toutefois, la construction (CC) s'étend à ce cas pour donner une différentielle quadratique avec les

invariants locaux souhaités en identifiant la première moitié du vecteur r avec le premier segment $-v/2$.

Dans le cas où $s_1, s_2 \geq 3$, on a deux cas à traiter selon que les s_i sont impairs ou sont pairs. Si les s_i sont impairs, on utilise la construction (CC) avec un uplet E formé de $\lfloor \frac{s_1}{2} \rfloor$ vecteurs 1, de $\lfloor \frac{s_2}{2} \rfloor$ vecteurs r , de $\lceil \frac{s_1}{2} \rceil$ vecteurs -1 , de $\lceil \frac{s_2}{2} \rceil$ vecteurs $-r$ et enfin avec deux vecteurs $v_1 = v_2 = (1+r)/2$ égaux à l'opposé de la demi-somme des autres vecteurs. On forme alors un polygone en concaténant les l_1 premiers éléments de E puis v_1 puis les $l_2 - 1$ suivants et enfin v_2 . Ce polygone est représenté au milieu de la figure 16 pour la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(3, 5; (-2^6))$ et les résidus quadratiques $((1^3), (R^3))$. Ce polygone est non dégénéré car les l_1 premiers vecteurs sont d'un côté des vecteurs v_i et les autres vecteurs strictement de l'autre côté. La différentielle quadratique est alors obtenue par la construction (CC).

Dans le cas où les s_i sont d'ordres pairs, on utilise la construction (CC) avec E constitué de $\frac{s_1}{2} - 1$ fois -1 , de $\frac{s_2}{2} - 1$ fois r , de $\frac{s_1}{2}$ fois 1, de $\frac{s_2}{2} + 1$ fois $-r$ et enfin une fois -1 et enfin avec deux vecteurs $v_1 = v_2 = r$ égaux à l'opposé de la demi-somme de ces vecteurs. L'ensemble E_1 de la construction (CC) est constitué des l_1 premiers éléments de E . Comme dans le cas précédent, le polygone est non dégénéré. En effet, comme $\frac{s_2}{2} - 1 \geq 1$ il n'y a pas de points d'intersection au début de la concaténation. De plus, la concaténation des premiers vecteurs est d'un côté des vecteurs v_i et les derniers de l'autre côté. Cette construction est présentée à droite de la figure 16 pour la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(7, 9; (-2^{10}))$ et les résidus quadratiques $((1^6), (R^4))$.

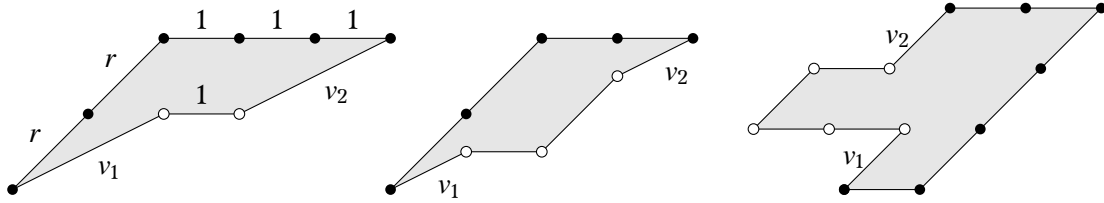


FIGURE 16. Les polygones utilisés pour obtenir des différentielles de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-2^s))$ avec des résidus de la forme $((1^{s_1}), (R^{s_2}))$ où $R \notin \mathbf{R}_+$

Les résidus sont sur deux rayons. On considère maintenant le cas où les résidus quadratiques sont sur deux rayons distincts non nécessairement égaux entre eux. Nous noterons ces résidus quadratiques $(\alpha_1, \dots, \alpha_{s_1}, \beta_1 R, \dots, \beta_{s_2} R)$ avec $\alpha_i \in \mathbf{R}_+^*$ et $\beta_j \in \mathbf{R}_+^*$. Si $s_1 = 1$ ou $s_2 = 1$, alors on peut faire la construction (CC) comme au paragraphe précédent. On supposera donc que $s_1, s_2 \geq 2$.

On commence par le cas général où il existe deux résidus quadratiques non égaux le long de chaque rayon, i.e. il existe $\alpha_{i_1} \neq \alpha_{i_2}$ et $\beta_{j_1} \neq \beta_{j_2}$. On partitionne les résidus quadratiques $(\alpha_1, \dots, \alpha_{s_1})$ en deux sous-ensembles $\mathcal{R}_{i,1}$ satisfaisant les conditions suivantes. Le cardinal de $\mathcal{R}_{i,1}$ est supérieur ou égal à $\lfloor \frac{s_1}{2} \rfloor$ et la somme des racines des ces éléments est strictement inférieure à celles de $\mathcal{R}_{2,1}$. On partitionne les éléments $(\beta_1 R, \dots, \beta_{s_2} R)$ en deux sous-ensembles $\mathcal{R}_{i,2}$ avec les mêmes propriétés. On construit un polygone de type (CC) avec $v_1 = v_2$ définis comme l'opposé de la demi-somme des éléments définis dans la phrase suivante, E_1 , resp. E_2 , constitué des l_1 premier, resp. $l_2 + 1$ derniers, éléments suivants. On prend les racines avec parties réelles positives des éléments de $\mathcal{R}_{1,1}$ et de ceux de $\mathcal{R}_{1,2}$ (si la partie réelle de ces éléments est nulle, la partie imaginaire est positive), puis les racines de parties réelles négatives de ceux de $\mathcal{R}_{2,1}$ et $\mathcal{R}_{2,2}$. Le polygone ainsi obtenu est clairement non dégénéré et la construction (CC) donne la différentielle quadratique désirée.

Considérons le cas où tous les résidus quadratiques sont égaux entre eux sur un rayon, i.e. les résidus quadratiques sont de la forme $(\alpha_1, \dots, \alpha_{s_1}, R, \dots, R)$ avec les $\alpha_i \in \mathbf{R}_+^*$ non tous égaux entre eux. Dans ce cas la seule situation où la construction précédente ne fonctionne pas est lorsque s_2 est pair. Dans ce cas, on fait une construction similaire à celle illustrée

à gauche de la figure 16. On considère $s_2/2 + 1$ vecteurs r puis $\lfloor \frac{s_1}{2} \rfloor$ racines positives des α_i puis $s_2/2 - 1$ vecteurs $-r$ puis les racines négatives des autres α_i . Si nous supposons que les $\lfloor \frac{s_1}{2} \rfloor$ premiers α_i possèdent les normes les plus grandes, alors un calcul similaire au cas illustré à gauche de la figure 16 montre que le polygone ainsi formé est non dégénéré. On conclut en utilisant la construction (CC).

Les résidus sont sur trois rayons, cas triangulaire. Considérons maintenant le cas où les R_i sont sur trois rayons différents. Dans un premier temps nous supposons que les $s = s_1 + s_2 + s_3$ résidus quadratiques sont de la forme $((R_1^{s_1}), (R_2^{s_2}), (R_3^{s_3}))$ avec les R_i triangulaires. De plus, nous choisissons les racines r_i de R_i telles que $r_1 + r_2 + r_3 = 0$. Si $s_1 = s_2 = s_3$, on définit $v_1 = v_2 = r_1$ et on construit le polygone de type (CC) suivant. Soit E le s -uplet dont les éléments sont $s_1 - 1$ fois r_1 , puis s_2 fois r_2 , puis une fois $-r_1$ et enfin s_3 fois r_3 . On concatène v_1 puis les l_1 premiers éléments l'ensemble E puis v_2 et enfin les $l_2 + 1$ derniers éléments de E . Le polygone obtenu pour $\Omega^2 \mathcal{M}_0(3, 5; (-2^6))$ est représenté à gauche de la figure 17. On vérifiera facilement que le polygone ainsi obtenu est non dégénéré sauf dans le cas de la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(1, 1; (-2^3))$. La construction (CC) donne donc les différentielles quadratiques souhaitées.

Si $s_1 \geq s_2 \geq s_3$ avec au moins une inégalité stricte on fait la construction (CC). Nous donnons tout d'abord une construction qui fonctionne sauf dans le cas des strates de la forme $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2s' - 1, 2s' - 1; (-2^{2s'+1}))$ lorsque $s_1 > s_2 = s_3$.

L'uplet E_1 est constitué des l_1 premiers éléments suivants : $\lfloor \frac{s_1}{2} \rfloor$ fois r_1 , puis s_3 fois r_3 , puis $\lfloor \frac{s_1}{2} \rfloor$ fois $-r_1$ et enfin s_2 fois r_2 . On définit $v_1 = v_2$ égale à la moitié de l'opposé de la somme des éléments précédents. On construit alors le polygone de type (CC) avec ces vecteurs, le cas $\Omega^2 \mathcal{M}_0(5, 7; (-2^8))$ est représenté au centre de la figure 17 avec $s_1 = 5$, $s_2 = 2$ et $s_3 = 1$. Il reste à justifier que le polygone ainsi construit est non dégénéré sauf si $s_2 = s_3 = 1$ et $a_1 = a_2 = 2s' - 1$ avec $s = 2s' + 1$. Supposons que $s_2 = s_3 = 1$ et que s est pair. On a alors $a_1 \leq s - 3$ et donc $l_1 \leq \lfloor \frac{s_1}{2} \rfloor$. Comme $v_1 = v_2 = r_1/2$, on en déduit immédiatement que le polygone est non dégénéré. Le cas s impair se traite de la même façon dès que $a_1 \neq a_2$. Les cas avec $s_2 = s_3 \geq 2$ et soit s pair, soit s impair et $a_1 \neq a_2$ se traitent comme précédemment. Enfin le cas $s_2 > s_3$ se montre de manière similaire.

Il reste à traiter le cas des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2s' - 1, 2s' - 1; (-2^{2s'+1}))$ avec $s_1 > s_2 = s_3 > 1$. Dans ce cas, on définit E_1 par une fois r_2 , puis $(s_1 - 1)/2$ fois r_1 , et $s_3 - 1$ fois r_3 . L'uplet E_2 est définie par r_3 , puis $(s_1 + 1)/2$ fois $-r_1$ et enfin $s_2 - 1$ fois r_2 . Il suit facilement du fait que $v_1 = v_2 = \frac{1+s_2}{2}$ que le polygone de type (CC) ainsi obtenu est non dégénéré sauf dans le cas $(s_1, s_2, s_3) = (3, 2, 2)$. Dans ce dernier cas, nous définissons $v_1 = v_2 = -r_1$ et nous considérons le polygone obtenu via la concaténation $r_1, r_2, r_1, v_1, -r_3, -r_1, r_3, v_2, -r_2$. Ce polygone est dégénéré mais comme lors du cas $((R_1^{s_1}), (R_{s_2}))$ au début de cette preuve, la construction (CC) s'étend à ce cas et donne la différentielle quadratique souhaitée.

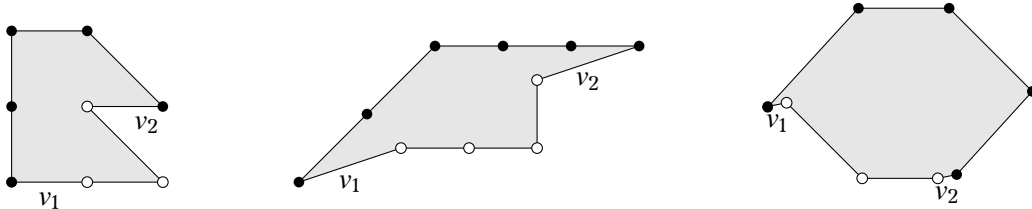


FIGURE 17. Les polygones utilisés pour construire les différentielles dont les résidus sont sur trois rayons distincts

Les résidus sont sur trois rayons, cas non triangulaire. Nous traitons maintenant le cas des résidus quadratiques sur trois rayons distincts mais ne sont pas triangulaires. Nous commençons par le cas où les résidus quadratiques sont $((R_1^{s_1}), (R_2^{s_2}), (R_3^{s_3}))$ avec les R_i sur trois rayons distincts. Commençons par le cas où $s_i = 1$ pour tout i . Dans ce cas on choisit

les racines r_i pour que la somme soit minimale. De plus, quitte à permuter les indices, on peut supposer que le point final de la concaténation des r_i pour i croissant est soit strictement au dessus de la droite engendrée par r_1 , soit appartient au segment r_1 . On définit $v_i = -(r_1 + r_2 + r_3)/2$ et on obtient les deux strates via la construction (CC) soit en concaténant les r_i puis les v_i soit en concaténant v_1 puis r_1 puis v_2 puis les autres r_i . Notons que le polygone est dégénéré si et seulement si le point final de la concaténation est sur r_1 . Toutefois la construction (CC) s'étend à ce cas en identifiant les segments correspondants aux v_i bord du demi-cylindre collé à r_1 par rotation et translation. Dans le cas où il y a plus de pôle on modifie cette construction de la façon suivante. Dans les cas où certains $s_i = 2$ et les autres $s_j = 1$ on concatène deux fois les résidus correspondant et on réalise la même construction. Dans le cas où tous les $s_i = 2$, alors cette construction peut ne pas fonctionner car le point final de la concaténation peut être r_1 . Dans ce cas on considère r_1 puis $2r_2$ puis $-r_1$ puis $2r_3$ et la construction est identique. Lorsque un s_i est supérieur ou égal à 3 on concatène une fois r_i et une fois $-r_i$ à la construction précédente. Comme cela on obtient les différentielles quadratiques souhaitées.

Supposons maintenant que les résidus quadratiques sont sur trois rayons distincts, mais pas tous égaux sur au moins un rayon. On notera $(R_{1,1}, \dots, R_{1,s_1}, R_{2,1}, \dots, R_{2,s_2}, R_{3,1}, \dots, R_{3,s_3})$ ces résidus, où les $R_{i,j}$ sont sur un même rayon à i fixé et au moins un $s_i \geq 2$. On considère deux cas selon que $s_i \geq 2$ pour $i = 2, 3$ ou que $s_2 = s_3 = 1$. Dans le cas où $s_i \geq 2$ pour $i = 2, 3$, pour chaque i , on partitionne $\{R_{i,1}, \dots, R_{i,s_i}\}$ en deux sous-ensembles $\mathcal{R}_{i,1}$ et $\mathcal{R}_{i,2}$ vérifiant les propriétés suivantes. La norme de la somme des racines des éléments de $\mathcal{R}_{i,1}$ est strictement inférieure à celle des éléments de $\mathcal{R}_{i,2}$. De plus la cardinalité de $\mathcal{R}_{i,1}$ est supérieure ou égale à $\frac{s_i}{2} - 1$. Il est clair que l'on peut toujours trouver de telles partitions (ce qui n'est en général pas le cas si les résidus quadratiques sont triangulaires). Le uplet E est constitué des racines carrées r_i des éléments des $\mathcal{R}_{i,1}$ qui ont une partie réelle positive (ou une partie imaginaire si la partie réelle est nulle) dans l'ordre des arguments croissant puis des racines $-r_i$ de partie réelle négative des $\mathcal{R}_{i,2}$. Notons que si $s_1 = 1$, alors $\mathcal{R}_{1,1} = \emptyset$ et donc on commence avec les éléments de $\mathcal{R}_{2,1}$. Les vecteurs v_i sont définis comme précédemment comme étant la moitié de l'opposée de la somme de ces racines. La construction que nous allons décrire est représentée à droite de la figure 17 dans le cas de la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(3, 5; (-2^6))$. Supposons que quitte à multiplier tous les résidus quadratiques par un même nombre complexe, on peut supposer que les racines des éléments de $\mathcal{R}_{1,1}$ sont réels positifs. Notons que la concaténation est sans points d'intersections et que le point final de celle-ci est d'ordonnée strictement négative. On en déduit que l'on peut prendre pour E_1 les l_1 premiers éléments de E si ceux-ci sont dans les ensembles $\mathcal{R}_{i,1}$. Enfin dans le cas où l_1 est supérieur que le nombre de ces éléments, on peut ajouter soit les premières racines de $\mathcal{R}_{1,2}$ ou les dernières de $\mathcal{R}_{3,2}$ selon que l'argument des $-v_i$ est supérieur ou inférieur à celui des racines des $\mathcal{R}_{2,2}$. On conclut alors avec la construction (CC).

Dans le cas où $s_2 = s_3 = 1$ la construction est la suivante. Nous commençons par concaténer les racines $r_{1,i}$ des $R_{1,i}$ par norme croissante puis r_2 puis r_3 . Les vecteurs v_i sont définis comme précédemment. Par hypothèse, la somme des $\lfloor s_1/2 \rfloor$ premières racines $r_{1,i}$ est strictement à la somme des dernières. Donc le polygone obtenu en concaténant v_1 puis $l_1 \leq \lfloor s_1/2 \rfloor$ des premières racines $-r_{1,i}$ puis v_2 puis les autres racines $r_{1,i}$ et enfin r_2 et r_3 est non dégénéré. Donc on peut obtenir toutes les strates sauf celle où $a_1 = a_2$ via la construction (CC). Dans le cas $a_1 = a_2$ la construction est la suivante. Dans ce l'ensemble E_1 contient la racine de partie réelle négative de $r_{1,1}$ puis les racines de partie réelle positive des éléments des derniers $r_{1,i}$. On suppose de plus que le premier élément de partie réelle positive est de norme strictement supérieur à $r_{1,1}$ (ce qui est possible par hypothèse). Le polygone de type (CC) ainsi formé est dégénéré. Toutefois, la construction (CC) qui lui est associée donne une différentielle quadratique avec les invariants souhaités en collant le demi cylindre correspondant à $r_{1,1}$ à celui qui correspond au premier élément de partie réelle positive.

Les résidus sont sur au moins quatre rayons. Considérons enfin les cas où les résidus R_i appartiennent à au moins quatre rayons différents. Considérons le cas où les s résidus quadratiques R_i sont sur s rayons distincts et vérifient $\sum r_i = 0$ pour un choix de racines r_i de R_i . Nous supposons de plus que la concaténation des r_i pour i croissant est un polygone convexe. Un exercice élémentaire permet de vérifier qu'il existe au moins $s_1 := \lceil \frac{s}{2} \rceil$ racines r_i dont les arguments sont contenus dans un segment de longueur π . Nous supposons qu'il s'agit des résidus r_1, \dots, r_{s_1} . Nous considérons le uplet E constitué de r_2, \dots, r_{s_1-1} , puis $-r_1$, puis r_{s_1+1}, \dots, r_s et enfin $-r_{s_1}$. Les vecteurs v_i et les uplets E_i sont définis comme précédemment. Cette construction est représentée dans la figure 18. La condition sur les angles assure que le polygone de type (CC) ainsi obtenu est non dégénéré pour toute les strates. Les différentielles quadratiques s'obtiennent avec la construction (CC).

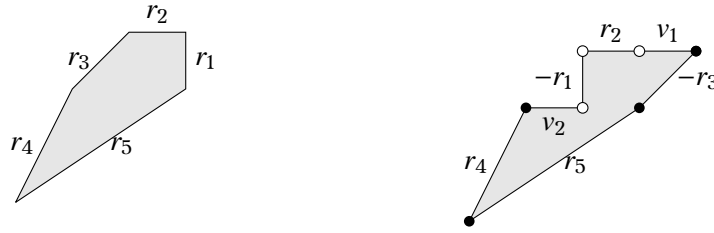


FIGURE 18. Les polygones utilisés pour construire une différentielle de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(3, 5; (-2^5))$ dont les résidus sont sur 5 rayons distincts et il existe des racines de somme nulle

Les cas où il existe une somme de racines des résidus quadratiques nulle et où il y a plusieurs résidus quadratiques sont sur le même rayon se traite de manière analogue au cas précédent.

Le cas où les résidus quadratiques sont sur au moins 4 rayons et il n'existe pas de somme des racines r_i qui soit nulle se traite de manière similaire au cas de 3 rayons. On sépare le cas où tous les résidus quadratiques sont égaux entre eux sur chaque rayon et le cas où il existe au moins deux résidus quadratiques distinctes sur un rayon. Les constructions sont les généralisations directes de celles présentées dans ces cas. \square

Nous généralisons maintenant le résultat aux différentielles avec 2 zéros impairs et un nombre quelconque de zéros pairs.

Lemme 6.9. Soit $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; (-2^s))$ une strate quadratique avec a_1, a_2 pair et a_i pair pour $i \geq 3$. L'image par l'application résiduelle de cette strate contient tous les s -uplets dont les éléments n'appartiennent pas à un même rayon issu de l'origine.

Démonstration. Le résultat se déduit du lemme 6.8 des strates avec deux zéros par éclatement de zéros, à l'exception du cas des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2s' - 1, 2s' - 1, 2; (-2^{2s'+2}))$ avec les résidus quadratiques de la forme $((1^{2s'}, R, R)$ avec $R \notin \mathbf{R}_+$. Dans ce cas la construction, représentée sur la figure 19, est la suivante. On construit un triangle en concaténant le vecteur r avec s' fois le vecteur 1 puis trois fois le vecteur $-\frac{r+s'}{3}$ dans le premier cas. On construit un second triangle en concaténant les mêmes vecteurs en commençant par les vecteurs 1 puis r . Les trois derniers vecteurs du premier triangle sont notés v_1, v_2, v_3 dans cet ordre et ceux du second par w_i . La différentielle quadratique est obtenue en collant des demi-cylindres infinis aux vecteurs 1 et r et en identifiant v_1 à v_3 , w_1 à w_3 et v_2 à w_2 . \square

6.5. Les résidus appartiennent au même rayon. Nous distinguons les cas selon si la configuration à réaliser est arithmétique ou non.

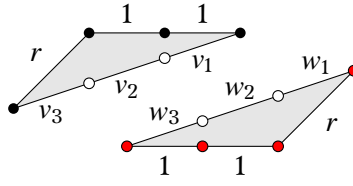


FIGURE 19. Les polygones utilisés pour construire une différentielle de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2s'-1, 2s'-1, 2; (-2^{2s'+2}))$ dont les résidus sont de la forme $((1^{2s'}), R, R)$

6.5.1. Réduction au cas arithmétique. Nous montrons que les seules restrictions qui ne viennent pas des lemmes 6.1 et 6.3 ne peuvent apparaître que dans les cas arithmétiques.

Lemme 6.10. *Soit (R_1, \dots, R_s) un s -uplet qui n'est ni triangulaire ni en croise. Si ce s -uplet n'est pas dans l'application résiduelle de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; (-2^s))$, alors, quitte à multiplier les R_i par $\alpha \in \mathbb{C}^*$, on a $R_i = r_i^2$ avec $r_i \in \mathbb{N}$ premiers entre eux.*

Démonstration. Soit (R_1, \dots, R_s) un s -uplet de nombre réels positifs non arithmétique qui n'est pas dans l'image de l'application résiduelle. Alors il existe des équations avec des coefficients dans $\mathbb{Z}/2$ qui sont satisfaites par les racines r_i des R_i . En effet, pour obtenir une différentielle quadratique avec ces invariants, soit on fait la construction (CC) soit on fait la construction analogue en concaténant $l_1 + 1$ résidus de somme strictement supérieure à la somme des l_2 restant. On a donc pour chacune de ces constructions un sommet où coïncident deux sommes partielles. Les équations sont induites par ces égalités. Notons que l'hypothèse de non arithméticité implique que ces équations définissent une variété de dimension supérieur ou égale à 1 après projectivisation. Donc cette variété contient des points qui ne sont pas tous proportionnels entre eux. Montrons que les éléments de cette variété ne sont pas dans l'image de l'application résiduelle. Considérons un uplet au voisinage de ce uplet et supposons qu'il existe une différentielle quadratique qui possède ces invariants. Rappelons que le lemme 5.2 de [CG21] implique que cette différentielle est obtenue en collant des demi-cylindres à bord polygonaux via des translations et rotations. On coupe ces demi-cylindres le long des liens-selles à leur bord et d'un lien-selle entre les deux zéros. On obtient alors un polygone. Comme les résidus sont au voisinage d'un uplet de nombres réels, la partie réelle des segments du polygone sont très supérieures à la partie imaginaire. Le polygone est donc plongé dans le plan, sauf éventuellement des côtés qui se superposent. Comme les équations précédentes sont satisfaites, il existe des sommets du polygone qui se projettent sur le même point. Le point correspondant de la surface plate est donc une singularité et donc ce uplet n'est pas réalisable. Le lemme 6.9 implique que ces s -uplets sont soit de la forme $(1, \dots, 1, R, R)$ soit triangulaires dans les strates où ces résidus posent problème. Donc le s -uplet original est de l'une de ces deux formes dans la strate correspondante. \square

6.5.2. Réalisation des configurations arithmétiques. La construction de différentielles lorsque la configuration arithmétique ne satisfait pas les inégalités (1.4) et (1.5) du théorème 1.9 est particulièrement longue. Aussi nous séparerons la preuve en trois parties. Tout d'abord, nous montrerons le résultat dans des cas particuliers et nous donnerons quelques résultats généraux. Dans un deuxième temps nous considérerons les cas de résidus de somme impaire. Enfin dans un troisième temps nous verrons le cas des résidus de somme paire.

Cas particuliers et considérations générales. Nous commençons par des résultats sur des strates avec des singularités de petits ordres.

Proposition 6.11. *Dans la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(1, 1; (-2^3))$, un triplet (r_1^2, r_2^2, r_3^2) d'entiers est dans l'image de l'application résiduelle si et seulement si $r_3 \neq r_1 + r_2$.*

Démonstration. Si $r_3 > r_1 + r_2$, la configuration est réalisable de la façon suivante. On colle les cylindres de tailles r_1 et r_2 à r_3 tel que le bord possède deux segments disjoints. Ces deux segments sont collés entre eux par rotation. Si $r_3 < r_1 + r_2$, on colle r_3 aux cylindres r_1 et r_2 tel que le bord est composé de deux segments de même taille, chacun au bord d'un cylindre distinct. La différentielle est obtenue en collant ces segments ensemble.

Réciproquement, si $r_3 = r_1 + r_2$, alors le triplet est triangulaire et donc non réalisable par le lemme 6.1. \square

Proposition 6.12. *Dans la strate $\Omega^2 M_0(1, 5; (-2^5))$, tout quintuplet $(r_1^2, r_2^2, r_3^2, r_4^2, r_5^2)$ d'entiers avec $r_1 > r_2 > r_3 > r_4 > r_5$ est réalisable.*

Démonstration. Si $r_1 + r_4 > r_2 + r_3 + r_5$, alors on peut réaliser la configuration de la façon suivante. On colle le cylindre r_5 à r_4 puis le bord de celui-ci à r_3 . Ensuite on colle le bord de r_3 et r_2 au bord de r_1 tel que le bord possède deux segments de même longueur que l'on identifie entre eux.

Si $r_1 + r_4 < r_2 + r_3 + r_5$, alors on colle r_5 à r_4 puis le bord de celui-ci à r_3 . Par la suite on colle r_2 à r_1 et r_3 de tel sorte que le bord de cette surface est constitué de deux segments égaux au bord de r_3 et r_1 . La différentielle est obtenue en collant ces deux segments.

Si $r_1 + r_4 = r_2 + r_3 + r_5$, alors $r_1 + r_3 > r_2 + r_4 + r_5$ et on peut faire la construction du premier cas. \square

Lemme 6.13. *Dans la strate $\Omega^2 M_0(3, 3; (-2^5))$, tous les quintuplets d'entiers de la forme (x, y, z, d, d) avec $d \neq x, y, z, y \geq x$ et $z = x + y$ est réalisable.*

Démonstration. Nous distinguons plusieurs cas. Si $z > d > x, y$, alors on peut toujours réaliser la configuration avec une surface dont le graphe d'incidence est cyclique avec les cylindres de tailles (x, y, d, z, d) dans cet ordre. Les longueurs des segments sont alors données par $(z - d, d - x, x, y, d - y)$.

Si $d > z$, alors le cycle est fait de cylindres de tailles d, d et z . On peut ensuite coller un cylindre de taille x sur un cylindre de taille d et le cylindre de taille y sur l'autre cylindre de taille d . Les longueurs des segments du cycle sont alors $(d - z, x, y)$.

Si $x < d < y < z$, alors le cycle est fait de trois cylindres de tailles d, y et z . On colle ensuite un cylindre de taille x sur le cylindre de taille y et l'autre cylindre de taille d sur celui de taille z . Les longueurs des segments du cycle sont alors $(x, y - d, d - x)$.

Si $d < x$, alors le cycle est simplement fait du cylindre de taille z . On colle sur ce sommet deux chaînes faites d'un cylindre de taille y (ou x) et enfin un cylindre de taille d . \square

Lemme 6.14. *Étant donnée la strate $\Omega^2 M_0(5, 5; (-2^7))$, les 7-uplets suivants sont dans l'image de l'application résiduelle.*

(1) $(x^2, y^2, y^2, y^2, z^2, z^2, z^2)$ avec $y > x$ et $z = x + y$;

(2) $(x^2, x^2, x^2, y^2, z^2, z^2, z^2)$ avec $y > x$ et $z = x + y$;

(3) $(x^2, x^2, x^2, y^2, y^2, y^2, z^2)$ avec $y > x, z = x + y$ et, soit $x > 1$, soit $x = 1$ et $y \geq 3$.

Démonstration. Dans le cas (1), on commence par former deux chaînes. La première est constituée d'un cylindre de taille x que l'on colle sur un cylindre y puis sur un cylindre z . La seconde est constituée d'un cylindre y sur un cylindre de taille z puis un autre de taille z . On colle alors les bords des cylindres de tailles z entre eux et à un cylindre de taille y . De plus, on les colle de telle façon que chaque chaîne contribue à un zéro distinct.

Dans le cas (2), on commence par former une chaîne en collant un cylindre de taille x au cylindre de taille y . On colle reste de ce bord à un cylindre de taille z et un cylindre de taille x à chacun des autres cylindres de tailles z . Puis on colle les bords des cylindres z entre eux cycliquement afin que la chaîne contribue à un zéro distinct des cylindres x .

Dans le cas (3), on commence par noter que si $y = 2x$, alors les racines des résidus sont $(1, 1, 1, 2, 2, 2, 3)$, qui n'est pas considéré (et n'est pas réalisable). On sépare les cas selon que y est strictement plus grand ou plus petit que $2x$.

Si $y > 2x$, alors on forme une chaîne en collant un cylindre de taille x sur un y et sur un z . On colle un cylindre de taille x sur chaque cylindre de taille y . Puis on colle les bords des cylindres y avec celui de z de manière cyclique tel que la chaîne contribue à un zéro distinct des cylindres x .

Si $y < 2x$, on colle sur un cylindre de taille z deux chaînes tel que le reste du bord est composé de deux segments disjoints que l'on identifie par rotation. La première chaîne est composé d'un cylindre de taille x collé sur y , puis x . La seconde chaîne est formé d'un cylindre de taille x sur un cylindre y puis un autre y . \square

Nous considérons certains cas de strates avec deux zéros. Nous commençons par le cas où l'un des zéros est un pôle simple.

Proposition 6.15. *Il existe une différentielle dans la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(-1, 2s - 3; (-2^s))$ dont les résidus (r_1^2, \dots, r_s^2) sont arithmétiques si et seulement si la somme $T = \sum r_i \geq 2s - 1$.*

La preuve de cette proposition se fait par récurrence sur le nombre de pôles.

Démonstration. Si $s = 1$, la proposition est trivialement vraie. Quand $s = 2$, les résidus $(1, 1)$ ne sont pas réalisable car sinon on obtiendrait une différentielle entrelacée lissable dans le bord de $\Omega^2 \mathcal{M}_1(-1, 1)$ en collant les pôles doubles. Tous les autres résidus de la forme (a^2, b^2) avec $a, b \in \mathbb{N}$ premiers entre eux sont réalisables en collant par rotation deux segments de longueur $(a + b)/2$ en bas des deux cylindres de circonférence a et b .

Supposons la proposition valide jusqu'à $s \geq 2$. Prenons un $(s + 1)$ -uplet C d'entiers r_i premiers entre eux de somme $T \geq 2s + 1$. Comme les éléments de C ne sont pas tous identiques, on note r_1 un élément minimal et r_2 un élément maximal. Soit C' la configuration obtenue à partir de C en éliminant r_1 et en remplaçant r_2 par $r_2 - r_1$. S'il existe une différentielle de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2s - 3, -1; (-2^s))$ dont les racines des résidus sont les carrés des éléments de C' , alors lui on ajoute un cylindre de taille r_1 sur le celui de $r_2 - r_1$, que l'on grossi jusqu'à une taille de r_2 . Cette surface appartient à la strate voulue et ses résidus sont les carrés des éléments de C .

Supposons à présent que les carrés des éléments de C' n'apparaissent pas comme résidus dans la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(-1, 2s - 3; (-2^s))$. On pose k le pgcd de des éléments de C' . Notons que $T - 2r_1$ est strictement inférieur a $k(2s - 1)$. Étant multiple de k , le nombre $T - 2r_1$ vaut au plus $k(2s - 2)$ et C' compte donc au moins deux éléments égaux à k . Si $k = 1$, il s'ensuit que $r_1 = 1$ et que la somme de C' vaut au moins $2s - 1$. Donc les carrés des éléments de C' sont réalisables, ce qui est absurde. On supposera donc $k > 1$. Il y a deux cas : soit $C' = (k, k, 2k, \dots, 2k)$ soit C' compte au moins trois éléments égaux à k .

Considérons tout d'abord le cas où $C' = (k, k, 2k, \dots, 2k)$. Si $s = 2$, on a $C = (r_1, k, r_1 + k)$ dont les carrés sont résidus. En effet, $r_1 < k$ car premiers entre eux. On colle le cylindre de circonférence r_1 à celui de circonférence k . Puis on colle la partie restante du cylindre de circonférence k à celui de circonférence $r_1 + k$. On coupe la partie restante de ce cylindre en deux partie égales que l'on colle par rotation. Si $s > 2$, alors C' compte au moins un élément $2k$. Comme $r_1 < k$ et que C contient un élément égal à $2k$, l'élément maximal r_2 est strictement supérieur à $k + r_1$. Donc $C = (r_1, k, k, 2k, \dots, 2k, 2k + r_1)$ ou $r_2 = 2k + r_1$. Nous construisons C'' en retirant de C un élément égal à k et en remplaçant r_2 par $r_2 - k$. Comme $r_1, k \in C'' = (r_1, k, 2k, \dots, 2k, k + r_1)$, on obtient une configuration d'entiers premiers entre eux. Comme $k \geq 2$, cette les carrés des éléments de C'' sont réalisables dans la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(2s - 3, -1; (-2^s))$ et on obtient que C est réalisable par le même raisonnement que ci-dessus.

Considérons maintenant le cas où C' compte au moins trois éléments égaux à k . Le uplet C contient au moins deux éléments égaux à k . On construit la configuration C'' en retirant de C un élément égal à k et en le retranchant à r_2 . On obtient une configuration d'entiers premiers entre eux contenant en particulier k et r_1 . Si C'' est réalisable, les carrés des éléments de C sont également. Si C'' n'est pas réalisable, elle contient au moins deux

éléments égaux à 1. Il s'ensuit que $r_1 = 1$ et que soit $k = 1$, soit $r_2 - k = 1$. Comme $k = 1$ est exclue, nous avons $r_2 = k + 1$. Or, r_2 est nécessairement un multiple de k (le pgcd de C') donc $k = 1$, ce qui est absurde. \square

Nous allons montrer un résultat général pour les strates avec deux zéros.

Proposition 6.16. *Soit $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-2^s))$ une strate telle que a_1 et a_2 ne sont pas tous deux dans $4\mathbf{Z} + 1$ et (R_1, \dots, R_s) un s -uplet d'entiers deux à deux distincts. Il existe une différentielle dans $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-2^s))$ dont les résidus sont les R_i .*

Démonstration. Supposons que $R_i = r_i^2$ avec $r_1 > r_2 > \dots > r_s > 0$. La différentielle est obtenue de la façon suivante. On partitionne les $s - 1$ derniers résidus en deux ensembles E_i de cardinaux $(a_i + 1)/2$. De plus, on suppose que r_1 est strictement supérieur à la somme des sommes alternées des éléments des E_i , où l'élément maximal de chaque ensemble est positif. Par hypothèse, un certain a_i est dans $4\mathbf{Z} + 3$ et donc cet E_i contient un nombre pair d'éléments. Il suffit de choisir $E_i = \{r_2, \dots, r_t\}$ avec $t = \frac{a_i + 3}{2}$. L'inégalité est satisfaite par télescopage peu importe l'ordre de l'autre singularité.

On colle alors le bord des cylindres de chaque ensemble de façon croissante. Puis on colle les bords restant au bord du cylindre de circonférence r_1 de telle façon que le bord de la surface obtenue possède deux segments disjoints de même longueur. La différentielle quadratique est obtenue en collant ces segments par rotation. \square

Les racines des résidus sont de somme impaire. Nous allons maintenant considérer les cas où les résidus quadratiques $R_i = r_i^2$ sont tels que $\sum_i r_i$ est impaire.

Traisons tout d'abord des strates avec deux zéros dans $4\mathbf{Z} + 1$.

Proposition 6.17. *Dans les strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-2^s))$ avec $a_i \in 4\mathbf{Z} + 1$, tout s -uplet dont les éléments sont deux à deux distincts et de somme impaire est dans l'image de l'application résiduelle.*

Démonstration. Ces strates existent seulement si s est impair. Nous montrons la proposition par récurrence sur s , en exigeant en outre que le cylindre de résidu maximal est bordé par les deux zéros.

La propriété est valide pour la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(1, 1; (-2^3))$ par la proposition 6.11. Nous supposons que la proposition est vraie jusqu'à $s - 2$. Considérons une configuration de s racines de résidus (r_1, r_2, \dots, r_s) rangés en ordre décroissant. Remplaçons le triplet (r_1, r_2, r_3) par $\tilde{r} = r_1 - r_2 + r_3$. On a $\tilde{r} > r_i$ pour $i \geq 4$ car cette inégalité est équivalente à $r_1 + r_3 > r_2 + r_i$. Cette configuration de $s - 2$ résidus est réalisable par récurrence. La différentielle est alors obtenue en greffant la chaîne formée d'un cylindre de taille r_2 et d'un cylindre de taille r_3 sur celui de taille \tilde{r} . \square

Nous traitons maintenant le cas général dans le cas des strates avec deux zéros impairs mais sans zéros pairs.

Proposition 6.18. *Étant donnée une strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-2^s))$ avec $a_1 \leq a_2$ impairs et (r_1^2, \dots, r_s^2) des résidus avec r_i entiers, premiers entre eux et de somme T impaire. Si $T \geq a_2 + 2$, alors il existe une différentielle de cette strate avec ces résidus.*

Démonstration. On dénote $C = (r_1, \dots, r_s)$ comme dans la proposition avec $T > a_2 + 1$. Si les r_i sont deux à deux distincts, les propositions 6.16 et 6.17 donne le résultat. De même, si $a_1 = -1$, on déduit le résultat de la proposition 6.15.

Nous supposons donc par la suite que $a_1 > 0$ (en particulier, $s \geq 3$ et $a_2 \leq 2s - 5$) et qu'au moins deux r_i sont égaux entre eux.

Nous montrons dans un premier temps que le uplet C' obtenu en retirant à C les deux éléments égaux minimaux est de somme $T' \geq ka_2$, où k est le pgcd des résidus restants. Notons d les deux éléments retirés à C . Montrons tout d'abord que $k = 1$. Notons que k est

T'/k sont impairs, sans quoi T serait pair. Supposons que $T' < ka_2$. Dans ce cas, le fait que $a_2 \leq 2s - 5$, et le fait que T'/k est impair implique que $T' \leq k(2s - 7)$. Il s'ensuit que C' contient au moins trois éléments égaux à k . Le uplet C contient donc trois éléments égaux à k , deux éléments égaux à d et d'autres éléments multiples de k . On retire à C deux résidus égaux à k et on obtient un uplet C'' de la forme $(d, d, k, ka_1, \dots, ka_{s-5})$. Comme d et k sont premiers entre eux, ces nombres sont premiers entre eux. Si la somme totale de ces éléments est strictement inférieure à a_2 , alors trois d'entre eux sont égaux à 1. Ce qui est absurde.

Le pgcd k des éléments de C' est donc égal à 1. Supposons par l'absurde que $T' < a_2$. Dans ce cas, comme précédemment on a $T' \leq 2s - 7$. Il s'ensuit que sur les $s - 2$ éléments de C' , au moins trois d'entre eux sont égaux à 1. On en déduit que $d = 1$ et $T' = T - 2$. Or, la somme $T \geq a_2 + 2$, ce qui est absurde.

Pour conclure, il suffit de vérifier que s'il existe une différentielle dont les résidus sont les carrés des éléments de C' dans la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1 - 2, a_2 - 2; (-2^{s-2}))$, alors il existe une différentielle de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-2^s))$ dont les résidus sont les carrés des éléments de C obtenue à partir de C' en ajoutant deux éléments d . En effet, on peut se reporter soit au cas $a_1 = -1$ soit au cas où les résidus sont deux à deux distincts par cette opération.

Étant donnée une différentielle η de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-2^s))$ dont les résidus sont carrés des éléments de C' . Par le lemme 6.5, les liens-selles du cycle du graphe d'incidence de η sont de longueurs demi-entières (dans $\mathbf{Z} + 1/2$). Considérons un lien-selle du cycle. S'il est de longueur $L < d$, alors on ajoute deux cylindres de taille d dans le cycle avec des segments de taille L et $d - L$. Si $L > d$, alors on réduit sa taille à $L - d$ en ajoutant un cylindre de taille d sur chaque cylindre adjacent à ce segment. Dans chaque cas, on obtient une différentielle de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1 + 2, a_2 + 2; (-2^{s+2}))$ possédant les résidus souhaités. De plus, si le bord du cylindre de plus grande circonférence de η contient les deux zéros, alors ces chirurgies préservent cette propriété.

Enfin si tous les liens-selles du cycle sont de longueur d , alors d est un demi-entier. Le uplet C est alors $2C'$ auquel on ajoute deux éléments $2d$, ce qui est absurde. \square

Nous terminons la preuve du cas où la somme des r_i est paire en considérant les strates avec un nombre arbitraire de zéros pairs.

Corollaire 6.19. *Étant donnée une strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2, 2l_3, \dots, 2l_n; (-2^s))$ avec deux zéros impairs $a_1 < a_2$ et un nombre quelconque de zéros pairs et un uplet (r_1^2, \dots, r_s^2) arithmétique. Si la somme $\sum r_i \geq a_2 + 2$ est impaire alors il existe une différentielle de cette strate dont avec ces résidus.*

Démonstration. Le résultat se prouve par éclatement des zéros de la proposition 2.6. Le cas des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-2^s))$ est prouvé dans la proposition 6.18. En éclatant un zéro d'ordre $a_1 + 2l_3$ on obtient le résultat pour les strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2, 2l_3; (-2^s))$ lorsque la somme des racines des résidus T est supérieure ou égale à $2s - 1$. Pour ces strates, il reste donc à considérer les cas où $a_1 + 2 \leq T \leq 2s - 3$. Les autres strates s'obtiennent en éclatant le zéro d'ordre pair.

Soit C un s -uplet tel que $a_1 + 2 \leq T \leq 2s - 3$. Il contient au moins trois éléments égaux à 1. On forme un ensemble C_1 de $l_3 + 1$ éléments de C tels que si le complémentaire C_2 n'est pas vide, alors il contient au moins un 1. Par le théorème 1.2 de [GT21a] il existe une différentielle abélienne ω_1 de $\Omega \mathcal{M}_0(l_3; (-l_3 + 2))$ dont les résidus abéliens sont les éléments de C_1 et l'opposé de leur somme. De plus, il existe une différentielle η_2 de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-2^{s-l_3}))$ dont les résidus sont les carrés des éléments de C_2 et le carré de la somme des éléments de C_1 . La différentielle avec les invariants souhaités est obtenue en lissant la différentielle obtenue en collant η_2 à ω_1^2 le long du pôle de résidu maximal. \square

Les racines des résidus sont de somme paire. Nous donnons maintenant la construction des différentielles dans le cas où la somme T des racines des résidus est paire.

On commence par deux résultats dans des strates avec des zéros de petits ordres.

Lemme 6.20. *Pour tout $(x^2, x^2, y^2, y^2, z^2, z^2)$ avec $z > y > x$, il existe une différentielle dans la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(3, 5; (-2^6))$ qui possède ces résidus.*

Démonstration. On prend deux cylindres de taille x . On colle ces cylindres respectivement à un cylindre de taille z et à un cylindre de taille y . Le reste du bord du cylindre de taille y est collé au second cylindre de taille z . Les cylindres de tailles z sont alors collés entre eux et au dernier cylindre de taille y , tel que ce dernier est à droite du bord des cylindres x et y . \square

Lemme 6.21. *Pour tout $(x^2, x^2, x^2, x^2, y^2, y^2, y^2, y^2)$ avec $y > x$ et $x + y \geq 4$, il existe une différentielle de la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(5, 7; (-2^8))$ qui possède ces résidus.*

Démonstration. Notons qu'il n'est pas possible que $y = 2x$. En effet, comme x et y sont premiers entre eux, on a $x = 1$ et $y = 2$ et l'inégalité $x + y \geq 4$ n'est pas satisfaite. Dans la suite de la preuve nous supposons tout d'abord que $y < 2x$ puis $y > 2x$.

Si $y < 2x$, on commence par former deux chaînes. L'une en collant un cylindre de taille x à un de taille y , puis x et y . Notons que cela est possible par l'hypothèse $y < 2x$. L'autre en collant un cylindre de taille x à un de taille y puis un autre de taille y . Par la suite, on colle les bords des cylindres de tailles y entre eux et au bord d'un cylindre de taille x de telle sorte que les chaînes contribuent à des zéros distincts.

Si $y > 2x$, on commence par coller deux cylindres de taille x sur un cylindre de taille y . On considère alors les trois cylindres de taille y restant. On colle sur deux cylindres un cylindre de taille x et sur le dernier le bord du premier cylindre de taille y . Puis on colle les bords des trois cylindres de manière cyclique de telle sorte que les cylindres taille x de telle sorte que les deux cylindres x collés aux premier cylindre y contribuent à un zéro distinct des deux autres cylindres x . \square

Nous considérons maintenant le cas où les zéros sont dans $4\mathbf{Z} + 1$ et les résidus sont deux à deux distincts..

Proposition 6.22. *Soient $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2, (-2^s))$ une strate telle que $a_i \in 4\mathbf{Z} + 1$ et $s > 3$, et $R = (R_1, \dots, R_s)$ deux à deux distincts de somme paire. Il existe une différentielle de cette strate dont les résidus sont R .*

Démonstration. Commençons par noter que s est impair. Nous démontrons par récurrence sur s la propriété selon laquelle toute configuration formée de résidus deux à deux distincts et de somme impaire est réalisable dans les strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2, (-2^s))$ satisfaisant les conditions de la proposition. On exige de plus que le cylindre de plus grande taille est bordé par les deux zéros.

Le cas de la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(1, 5; (-2^5))$ est traité dans la proposition 6.12. De plus, sa preuve donne le fait que le cylindre de taille maximale est bordée des deux zéros.

Nous supposons la propriété valide jusqu'au rang $s - 2$. Considérons une configuration de s résidus (R_1, R_2, \dots, R_s) rangés en ordre décroissant, avec $R_i = r_i^2$. Remplaçons le triplet r_1, r_2, r_3 par $\tilde{r} = r_1 - r_2 + r_3$. Comme $r_1 - r_2 + r_3 > r_4$ nous obtenons un $(s - 2)$ -uplet dont les éléments sont deux à deux distincts. Par récurrence, il existe une différentielle avec ces résidus dans une strate avec $s - 2$ pôles tels que le cylindre de taille \tilde{r} est bordé par les deux zéros. En greffant la chaîne formée d'un cylindre de taille r_2 et d'un cylindre de taille r_3 sur celui de taille \tilde{r} , nous obtenons une différentielle avec les résidus souhaités. De plus, toutes les strates peuvent être obtenues car les deux nouveaux cylindres peuvent contribuer à n'importe quel des deux zéros. \square

Le résultat suivant nous permet d'obtenir des différentielles en ajoutant une paire de pôles aux résidus identiques sous certaines conditions.

Lemme 6.23. *Soit $R = (r_1^2, \dots, r_s^2)$ un s -uplet d'entiers tel que les r_i ne sont pas tous deux à deux égaux et $d \in \mathbf{N}$. Sauf si les r_i sont premiers entre eux de somme $2s$ et $d = 1$, alors*

s'il existe une différentielle de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-2^s))$ dont les résidus sont R , alors il existe une différentielle de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1 + 2, a_2 + 2; (-2^{s+2}))$ dont les résidus sont $R' = (r_1^2, \dots, r_s^2, d^2, d^2)$.

Démonstration. Considérons la surface plate associée à une différentielle dont les résidus sont R dans la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-2^s))$. Rappelons que le graphe d'incidence de cette différentielle possède un cycle. Si l'un des segment du cycle correspond à un lien-selle est de longueur strictement inférieure à d , alors on coupe la surface le long de ce lien-selle et on y colle successivement les deux cylindres de circonférence d . Si l'un des segments du cycle est de longueur strictement supérieure à d , on fait la construction suivante. On coupe le lien-selle correspondant. On colle un cylindre sur chacun des segments ainsi créé l'un adjacent à l'une des singularité et l'autre cylindre adjacent à l'autre singularité. Les parties restantes des segments sont collés entre eux en respectant les singularités. On obtient dans les deux cas une différentielle dans $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1 + 2, a_2 + 2; (-2^{s+2}))$ dont les résidus sont R' .

Il reste à considérer le cas où tous les segments du cycle du graphe d'incidence sont de longueur d . Dans ce cas, le graphe d'incidence possède des arbres collés sur le cycle. Sinon tous les cylindres seraient de circonférence $2d$, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle il existe des r_i distincts.

S'il existe une arête qui attache un arbre au cycle de longueur strictement supérieure à d , on fait la construction suivante représentée sur la figure 20. On coupe le lien-selle correspondant et on colle un cylindre au bord du pôle de l'arbre. On réduit la longueur du segment au bord du pôle du cycle de d et on crée un nouveau lien-selle de longueur d entre l'autre zéro. On colle le cylindre au segment que l'on vient de créer et les deux segments entre eux.

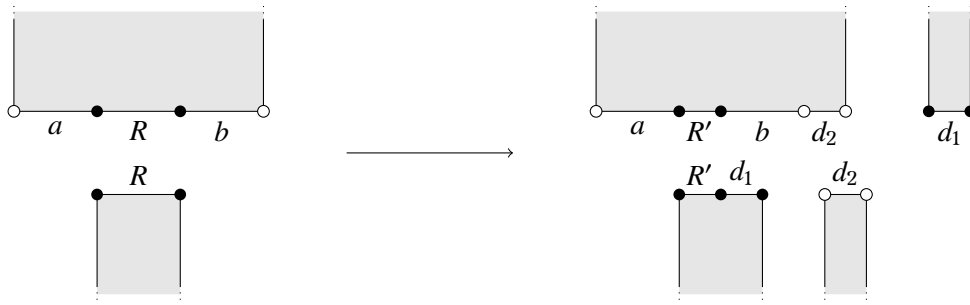


FIGURE 20. Une opération qui ajoute deux pôles doubles de résidus d .

S'il existe un arbre dans le segment qui le rattache au cycle est de longueur strictement inférieure à d , on procède de la sorte. On place entre les cylindres correspondant aux sommets joints par ce segment un cylindre de taille d . Le second cylindre de taille d est collé sur le cylindre du cycle de la même façon que dans le cas précédent.

Nous considérons finalement les cas où les segments du cycle sont égaux à d et les segments entre tous les arbres et le cycle sont égaux à d . Considérons un arbre. Remontons cet arbre en partant du cycle et au premier segment de longueur strictement inférieure à d . Nous pouvons alors réaliser la construction qui correspond à couper ce segment et à coller la branche sur le cycle au sommet où est collé est l'arbre. Si le segment que l'on coupe est à distance impaire du cycle, on obtient un nouveau graphe pour lequel les longueurs des segments du cycle ne sont pas tous égaux à d . On est alors ramené au cas précédent. Si le segment est à distance paire l'arbre que nous avons rajouté sur le cycle est attaché par un segment de longueur strictement inférieure à d . On est encore ramené à un cas précédent.

Demeurent donc les cas dans lesquels tous les segments internes des arbres sont de longueurs supérieures ou égales à d . Considérons un arbre. Remontons cet arbre en partant du cycle et considérons le premier segment de longueur $x > d$, entre un sommet A et un sommet B . Le sommet A est attaché au reste de l'arbre par une arête de taille d . Nous en

retirons A et sa branche pour la remplacer par une feuille correspondant à un cylindre de taille d . Puis nous coupons une arête du cycle et insérons les sommets A et B dans ce cycle en préservant la branche de A . De plus, ces sommets sont reliés au cycle par des segments de longueur d et entre eux par un segment de longueur $x - d$. Nous collons enfin une nouvelle feuille correspondant à un cylindre de taille d sur le sommet A . La différentielle associée à ce graphe possède les propriétés souhaitées.

Pour finir, si aucune des constructions précédentes à pu être réalisé, cela implique que toutes les du graphe de longueur d . Donc la taille de chaque cylindre est précisément vd , où v est la valence du sommet dans le graphe. À un facteur près, cela signifie que r est une configuration de s entiers (tous différents) de somme $2s$ et que $d = 1$. \square

Nous traitons maintenant le résultat général avec deux zéros impairs mais pas de zéros pairs.

Proposition 6.24. *Étant donnés une strate $\Omega^2\mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-2^s))$ avec deux zéros impairs et (r_1^2, \dots, r_s^2) un s -uplet arithmétique ni triangulaire ni en crose de somme $T = \sum r_i$ paire. Si $T \geq 2s = a_1 + a_2 + 4$, alors il existe une différentielle qui possède ces résidus dans la strate.*

Démonstration. Nous montrons cette proposition par récurrence sur le nombre s des pôles doubles. Le fait que cette propriété est satisfaite pour $a_1 = -1$ par la proposition 6.15 implique les cas $s = 1$ et $s = 2$. Nous supposons qu'elle est vérifiée pour toutes les strates avec au plus $s - 1$ pôles doubles.

Dans une strate $\Omega^2\mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-2^s))$, avec $a_2 \geq a_1 > 0$, considérons un s -uplet $r = (r_1, \dots, r_s)$ de somme paire $\geq 2s$ qui n'est ni triangulaire ni en crose. Si tous les éléments de r sont deux à deux distincts, alors les propositions 6.11, 6.16 et 6.22 permettent de réaliser une différentielle dans la strate dont les résidus sont les carrés de r .

Nous supposons désormais que le s -uplet r possède au moins deux éléments égaux à x . Retirons de r une paire d'éléments égaux à x et notons r_x le $(s - 2)$ -uplet. Soit les carrés des éléments de r_x sont résidus de différentielles de $\Omega^2\mathcal{M}_0(a_1 - 2, a_2 - 2; (-2^{s-2}))$, soit ils ne le sont pas. Dans le second cas, soit la somme des éléments de r_x (après division par le pgcd) est strictement inférieure à $a_1 + a_2 + 4$, soit le uplet est triangulaire, soit il est en crose. Nous allons maintenant traiter chacun de ces cas.

Les carrés de r_x sont réalisés. Supposons qu'il existe $x \in r$ tel que les carrés des éléments de r_x sont les résidus d'une différentielle de $\Omega^2\mathcal{M}_0(a_1 - 2, a_2 - 2; (-2^{s-2}))$. Le lemme 6.23 permet de réaliser la configuration r dans $\Omega^2\mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-2^s))$ sauf dans le cas où la somme des éléments de r_x est $2(s - 2)$ et $x = 1$. Dans ce cas, la somme des éléments de r est égale à $2s - 2$ et donc n'est donc pas réalisable par le corollaire 6.6.

Les carrés de r_x sont en crose. Supposons que pour une paire $x \in r$, le uplet r_x est en crose, i.e. de la forme (A, A, B, \dots, B) . Dans ce cas, soit $r = (A, A, B, \dots, B, x, x)$ avec A, B et x deux à deux distincts, soit $r = (x, x, x, x, B, \dots, B)$ avec un nombre pair supérieur ou égal à 4 d'éléments égaux à B . Dans le premier cas, on peut retirer du uplet r des paires de B pour obtenir $r = (A, A, B, B, x, x)$, qui est réalisable par le lemme 6.20. Donc le lemme 6.23 permet d'obtenir le résultat dans ce premier cas. Dans le second cas, $r = (x, x, x, x, B, \dots, B)$ avec au moins 4 éléments égaux à B . En enlevant des paires de B , on obtient le uplet (x, x, x, x, B, B, B, B) . Notons que si $x = 1$, alors comme la somme des éléments de r est supérieure ou égale à $2s$, il s'ensuit que $B \geq 3$. Le lemme 6.21 implique que ce uplet est réalisable et donc que r est réalisable par le lemme 6.23.

Les carrés de r_x sont triangulaires. Supposons maintenant que pour l'une des valeurs de x le uplet r_x est triangulaire. Ce uplet possède donc deux ou trois valeurs distinctes et donc r possède entre deux et quatre valeurs distinctes. Traitons ces cas successivement. Si r possède quatre valeurs distinctes, alors il est de la forme $(x, x, \alpha, \beta, \gamma, \dots, \gamma)$ avec m fois γ , où m est impair. Si $m \geq 3$, on peut éliminer une paire de γ de r pour obtenir par récurrence un uplet réalisable car la borne reste satisfaite. Dans le cas $(x, x, \alpha, \beta, \gamma)$ le lemme 6.13

donne le résultat. Si r possède deux valeurs distinctes, alors r_x est égal soit à $(1, \dots, 1, 2)$ soit à $(1, 1, 2, \dots, 2)$. Il s'ensuit que les éléments de r sont soit des 1, soit des 2 et donc r ne satisfait pas la borne. Considérons enfin le cas où r possède trois valeurs distinctes. Si r_x possède deux valeurs, il est égal soit à $(1, \dots, 1, 2)$, soit à $(1, 1, 2, \dots, 2)$. Ainsi r est égal soit à $(k, \dots, k, 2k, x, x)$, soit à $(k, k, 2k, \dots, 2k, x, x)$ avec x et k premiers entre eux. En éliminant des paires de k ou de $2k$ la borne reste respectée. On obtient alors des uplets réalisables dans $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1 - 2, a_2 - 2; (-2^{s-2}))$. Demeure le cas $(k, k, 2k, x, x)$ réalisable dans $\Omega^2 \mathcal{M}_0(3, 3; (-2^5))$ d'après le lemme 6.13. Enfin, si r_x admet trois valeurs distinctes α, β, γ avec $\beta > \alpha$ et $\gamma = \alpha + \beta$, alors x est égal à l'une de ces trois valeurs. Le uplet r est donc de la forme $(\alpha, \dots, \alpha, \beta, \dots, \beta, \gamma, \dots, \gamma)$ avec M_α (resp. β et M_γ) occurrences de α (resp. β et γ). La strate que nous considérons est $\Omega^2 \mathcal{M}_0(s-2, s-2; (-2^s))$. Comme r n'est pas triangulaire, au moins deux des M_i sont strictement supérieurs à 1. Si tous les M_i sont strictement supérieurs à 1, alors r_α serait réalisable ce qui contredit l'hypothèse. Le lemme 6.14 prove le cas où l'un des M_i est égale à 1 et les deux autres égaux à 3. Si l'un des M_i est égale à 1 et les deux autres sont supérieurs ou égaux à 5, alors on retire une paire du plus petit élément et on obtient un uplet réalisable, ce qui contredit l'hypothèse. Il reste enfin le cas où les M_i sont respectivement égaux à 1, 3 et $M \geq 5$. Dans ce cas, on considère le uplet auquel on a quitté une paire de l'élément présent M fois. Cet élément ne peut pas être égal à 1 car sinon ce uplet serait réalisable, ce qui contredit l'hypothèse. Si cet élément est strictement supérieur à 1, alors le $(s-2)$ -uplet vérifie également la borne sauf dans le cas où $r = (1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3)$. Mais dans ce cas r ne satisfait pas la borne, ce qui contredit l'hypothèse.

La somme des éléments de r_x est strictement inférieure à $a_1 + a_2$. Il nous reste à traiter les cas où pour chaque paire de valeur x , la somme des éléments de r_x ne vérifie pas l'inégalité (1.5).

Considérons la paire de valeur minimale x dans r . Notons k le pgcd des éléments de r_x . Supposons que $k = 1$. Dans ce cas, il n'y a pas de normalisation donc la somme des éléments de r_x est paire et inférieure ou égale à $2(s-2) - 2$. Donc r_x contient une paire de 1. Il s'ensuit que $x = 1$ et donc que la somme des éléments de r est inférieure ou égale à $2s$. Cela contredit l'hypothèse et ce cas n'est donc pas possible.

Nous supposons maintenant que $k > 1$. En particulier, la valeur minimale x de paires dans r apparaît exactement deux fois. Le uplet r_x ne respecte pas la borne. Si, après division par k , elle est de somme paire, cette somme vaut au plus $2(s-2) - 2 = 2s - 6$. Si elle est de somme impaire elle est strictement inférieure à $a_2 \leq 2s - 5$. Ainsi, r_x contient au moins un élément égal à k . Nous distinguerons les cas selon que r_x contient un, deux ou au moins trois éléments égaux à k .

Si r_x contient au moins trois éléments égaux à k , alors $r = (x, x, k, \dots, k, kc_1, \dots, kc_m)$. Éliminons une paire de k pour obtenir r_k dont les éléments sont sans facteurs communs. Ce uplet est de somme paire et par hypothèse non réalisable. Ses éléments minimaux sont donc égaux à 1. On a donc $r_k = (1, 1, 2, \dots, 2)$ et ainsi $r = (1, 1, 2, \dots, 2)$. La somme des éléments de r est $2s - 2$, ce qui contredit une hypothèse.

Si r_x a exactement deux éléments égaux à 1, alors soit $r_x = (1, 1, 2, \dots, 2)$ soit $r_x = (1, 1, 2, \dots, 2, 3)$. Dans le second cas, la somme des éléments de r_x est $2s - 5$. En particulier, elle est supérieure ou égale à a_2 et donc r_x est réalisable dans $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1 - 2, a_2 - 2; (-2^s))$ par la proposition 6.18. On en déduit que r est réalisable par le lemme 6.23. Dans le cas où $r_x = (1, 1, 2, \dots, 2)$, alors $r = (x, x, k, k, 2k, \dots, 2k)$ avec k et x premiers entre eux et $x < k$. Si $s = 4$, alors le seul cas à considérer est $r = (x, x, k, k)$ dans la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(1, 3; (-2^4))$. Or ce uplet est en crosse et donc non réalisable. Si $s = 5$, alors $r = (x, x, k, k, 2k)$. Si x est impair, alors $r_k = (x, x, 2k)$ est réalisable dans la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(-1, 1; (-2^3))$. Si x est pair, alors $r_k = (x/2, x/2, k)$ et n'est pas réalisable dans $\Omega^2 \mathcal{M}_0(-1, 1; (-2^3))$ seulement si $x = 2$. Cela implique que k est impair et donc la somme des éléments de r_k est impaire supérieure ou égale à 5. Elle est donc réalisable par la proposition 6.18. Si $s = 6$, alors

$r = (x, x, k, k, 2k, 2k)$ et est réalisable dans $\Omega^2\mathcal{M}_0(3, 5; (-2^6))$ par le lemme 6.20. Dans la strate $\Omega^2\mathcal{M}_0(7, 1; (-2^6))$, si x est impair, alors $r_k = (x, x, 2k, 2k)$ et est réalisable. Si x est pair, alors $r_k = (x/2, x/2, k, k)$ et n'est pas réalisable seulement si $x = 2$ et $k = 3$. Dans ce cas $r = (2, 2, 3, 3, 6, 6)$ et $r_6 = (2, 2, 3, 3)$ est réalisable dans $\Omega^2\mathcal{M}_0(5, -1; (-2^4))$ donc r l'est dans $\Omega^2\mathcal{M}_0(7, -1; (-2^6))$. Traitons enfin le cas général $s \geq 7$. Dans ce cas, $r_{2k} = (x, x, k, k, 2k, \dots, 2k)$ est toujours réalisable dans $\Omega^2\mathcal{M}_0(a_1 - 2, a_2 - 2; (-2^{s-2}))$. Le uplet r est donc réalisable dans $Q(a_1, a_2; (-2^s))$ par le lemme 6.23.

Si r_x possède un unique élément égal à 1, alors $r_x = (1, 2, \dots, 2)$. La somme de ces éléments est $2s - 5 \geq a_2$. La proposition 6.18 implique que le uplet r_x est donc réalisable dans $\Omega^2\mathcal{M}_0(a_1 - 2, a_2 - 2; (-2^{s-2}))$ et le lemme 6.23 implique que r est également réalisable. \square

Finalement, il reste à considérer le cas des strates avec un nombre arbitraire de zéros pairs.

Corollaire 6.25. *Soit $R = (r_1^2, \dots, r_s^2)$ un s -uplet arithmétique de somme $T = \sum r_i$ paire et $\Omega^2\mathcal{M}_0(a_1, a_2, 2l_3, \dots, 2l_n; (-2^s))$ une strate avec deux zéros impairs et un nombre quelconque de zéros pairs. Si la somme $T \geq a_1 + a_2 + 4$, alors il est réalisable dans la strate.*

Démonstration. Considérons tout d'abord le cas des strates $\Omega^2\mathcal{M}_0(a_1, a_2, 2l_3; (-2^s))$. Si un uplet est réalisable dans $\Omega^2\mathcal{M}_0(a_1 + 2l_3, a_2; (-2^s))$ ou $\Omega^2\mathcal{M}_0(a_1, a_2 + 2l_3; (-2^s))$, alors l'éclatement de zéros permet de le réaliser dans $\Omega^2\mathcal{M}_0(a_1, a_2, 2l_3; (-2^s))$. Nous distinguons deux cas selon que $T \geq 2s$ ou $2s - 2l_3 \leq T \leq 2s - 2$.

Si $T \geq 2s$, alors r est réalisable dans $\Omega^2\mathcal{M}_0(a_1 + 2l_3, a_2; (-2^s))$ ou $\Omega^2\mathcal{M}_0(a_1, a_2 + 2l_3; (-2^s))$ sauf si elle est triangulaire ou en croise. Les seuls cas où r pourrait ne pas être réalisable dans ces deux strates est si $a_1 = a_2$ et $l_3 = 1$. Ce sont les strates $\Omega^2\mathcal{M}_0(a_1, a_1, 2; (-2^s))$ lorsque r est de la forme (A, \dots, A, B, B) . Dans ce cas s est pair supérieur ou égal à 4. Pour réaliser ces résidus il suffit de lisser la différentielle stable formée en collant les pôles doubles de résidu $4A^2$ du carré d'une différentielle abélienne de $\Omega\mathcal{M}_0(-1, -1, -1, 1)$ dont les résidus sont $(A, A, 2A)$ et d'une différentielle de $\Omega^2\mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-2^{s-1}))$ dont les résidus sont les carrés de $(A, \dots, A, 2A, B, B)$. Il suffit donc de montrer que ce dernier cas est possible. Si $s \geq 6$, alors $A, 2A$ et B sont premiers entre eux et il existe donc une différentielle de $\Omega^2\mathcal{M}_0(a_1, a_1, 2; (-2^s))$ dont les résidus sont les carrés de ces éléments. Si $s = 4$ et B est pair, alors $A + B$ est impair, car A et B sont premiers entre eux. Par la proposition 6.18, dans ce cas la condition est simplement que la somme des éléments est supérieure ou égale à 3. Ce uplet est donc toujours réalisable.

Nous traitons à présent le cas $2s - 2l_3 \leq T \leq 2s - 2$. Cette condition implique qu'au moins deux éléments de r sont égaux à 1. Parmi les s éléments, on en choisit $l_3 + 1$ (sachant que $2l_3 \leq 2s - 2$) tels que si il reste des éléments, au moins l'un d'entre eux est égal à 1. On considère une différentielle abélienne ω_1 de $\Omega\mathcal{M}_0(l_3; (-1^{l_3+2}))$ dont les résidus sont les éléments choisis et l'opposé S de leur somme. Nous allons construire une différentielle ω_2 de $\Omega^2\mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-2^{s-l_3}))$ telle que les résidus sont donnés par les carrés des éléments restants et de S . S'il ne restait aucun résidu, alors $a_1 = a_2 = -1$ et l'existence de ω_2 vient simplement du fait que la strate $\Omega^2\mathcal{M}_0(-1, -1; -2)$ est non vide. S'il restait des résidus, au moins l'un d'entre eux vaut 1. Pour construire ω_2 , il faut simplement vérifier que le uplet r' formé par ces éléments et S est réalisable dans la strate. Notons que leur pgcd est 1 car r' contient 1.

La somme de $r' = (A_1, \dots, A_q, S)$ est supérieure ou égale à $2s - 2l_3 = a_1 + a_2 + 4$. Par la proposition 6.24 il suffit de vérifier qu'elle n'est ni triangulaire ni de la forme (A, \dots, A, B, B) . Pour que la configuration ne soit pas de la forme (A, \dots, A, B, B) , il suffit d'avoir choisis les $l_3 + 1$ plus grands éléments de r pour que S soit strictement supérieur aux autres éléments de r' . Si la configuration est triangulaire, alors la configuration est de la forme (A, B, \dots, B, S) avec $S = A + B$. Cela contredit le fait que S est la somme des plus grands éléments de r .

Finalement considérons le cas des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2, 2l_3, \dots, 2l_n; (-2^s))$ avec $n \geq 4$. Les différentielles avec les résidus souhaités sont obtenues par éclatement du zéro pair de la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, a_2, 2 \sum l_i; (-2^s))$. \square

7. DIFFÉRENTIELLES AVEC AU MOINS QUATRE SINGULARITÉS IMPAIRES

Dans cette section nous montrons qu'en genre zéro, pour les strates de différentielles qui possèdent au moins quatre singularités d'ordres impairs, l'application résiduelle est surjective. La preuve du théorème 1.3 se scinde en quatre sous-sections.

7.1. Les strates dont au moins un pôle est impair. La configuration uniformément nulle est réalisable dès lors que deux zéros ou deux pôles sont d'ordre impair. Ce sont les points i) et ii) du lemme 3.3. Toutes les configurations non triviales sont obtenues avec le lemme 3.4.

7.2. Les strates dont tous les pôles sont pairs non doubles. Nous montrons que s'il existe au moins trois zéros impairs, alors l'origine est dans l'image de l'application résiduelle.

Lemme 7.1. *Considérons la partition $\mu = (a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p)$. Si au moins quatre des ordres a_1, \dots, a_n sont impairs, alors l'application résiduelle $\mathfrak{R}_0^2(\mu)$ contient $(0, \dots, 0)$.*

Démonstration. Il suffit de considérer le cas de 4 zéros d'ordres impairs. Le cas avec davantage de zéros d'ordres impairs se déduit par éclatement. Prenons une strate avec quatre zéros d'ordre impair. On sait d'après le lemme 4.4 que la configuration uniformément nulle est réalisable par une différentielle quadratique avec deux zéros d'ordres impairs a_1 et a_2 et un zéro d'ordre a_3 pair vérifiant $a_3 \geq 2p$. L'éclatement de ce dernier zéro permet d'obtenir toutes les strates avec quatre zéros d'ordre impair, sauf si la somme des ordres de deux d'entre-eux est toujours strictement inférieure à $2p$. Les pôles étant d'ordres $b_i \geq 4$, les seules exceptions sont les strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0((p-1)^4; (-4)^p)$ avec p pair.

Dans le cas $\Omega^2 \mathcal{M}_0(1, 1, 1, 1; -4, -4)$ on considère deux parties polaires d'ordre 4 associées à $(v_1, v_2; v_3, v_4)$ et à $(v_4, v_2; v_3, v_1)$ respectivement, avec $v_i = 1$. On colle les segments de même nom ensemble pour obtenir la différentielle quadratique souhaitée. Enfin pour obtenir les différentielles dans les strates $\Omega^2 \mathcal{M}_0((p-1)^4; (-4)^p)$ avec p pair, on considère les parties polaires d'ordre 4 associées à $(1; 1)$. Puis on colle cycliquement la moitié de ces parties polaires aux segments v_1 et l'autre moitié aux segments v_3 . \square

7.3. Les strates dont tous les pôles sont pairs (dont au moins un pôle double). Dans ce cas, il y a un nombre pair (au moins quatre) de zéros d'ordre impair. C'est un cas particulier du lemme 5.10.

7.4. Les strates dont tous les pôles sont doubles. Nous considérons maintenant le cas des strates dont tous les pôles sont doubles.

Proposition 7.2. *L'application résiduelle de la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; (-2^s))$ avec $i \geq 4$ zéros impairs est surjective.*

Rappelons la notation $a_i = 2l_i + \bar{a}_i$ avec $\bar{a}_i \in \{0, -1\}$.

Preuve de la proposition 7.2. On commence par supposer que $n = 4$ et les a_i sont impairs. Les cas avec $n > 4$ s'obtiennent alors par éclatement de zéros. Le cas où les résidus ne sont pas sur le même rayon est en tout point similaire à la preuve du lemme 6.9. On se concentre sur le cas où les résidus quadratiques sont des réels positifs. On partitionne ces résidus en quatre sous-ensembles \mathcal{R}_i de cardinaux respectifs l_i (on notera que $l_1 + \dots + l_4 = s$). On choisit un réel strictement positif s_1 tel que

$$S := 2s_1 + \sum_{R_i \in \mathcal{R}_1} \sqrt{R_i} - \sum_{j=2,3,4} \sum_{R_i \in \mathcal{R}_j} \sqrt{R_i} > 0.$$

Enfin on choisit deux complexes s_2 et s_3 de partie réelle égale à $-\frac{s}{4}$ et de partie imaginaire respectivement strictement positive et strictement négative, tels que

$$2 \sum_{j=1,2,3} s_j + \sum_{R_i \in \mathcal{R}_1} \sqrt{R_i} - \sum_{j=2,3,4} \sum_{R_i \in \mathcal{R}_j} \sqrt{R_i} = 0.$$

On forme alors le polygone schématisé à gauche de la figure 21. Les pointillés sont constitués de la concaténations des $\pm \sqrt{R_j}$ dans les \mathcal{R}_i . On obtient la différentielle quadratique souhaitée en collant les s_i deux à deux et des demi-cylindres infinis aux segments r_i . \square

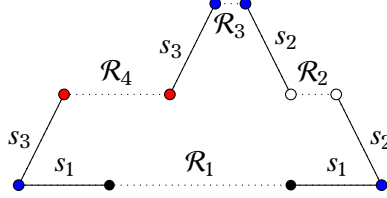


FIGURE 21. Le polygone pour obtenir une différentielle de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_4; (-2^s))$

8. DIFFÉRENTIELLES QUADRATIQUES EN GENRE SUPÉRIEUR

Dans cette section nous montrons que, à l'exception de quatre familles exceptionnelles, pour chaque strate de genre $g \geq 1$, l'application résiduelle est surjective. Plus précisément, nous prouvons les théorèmes 1.1 et 1.2. Cette section commence par un cours rappel sur les composantes connexes des strates de différentielles quadratiques méromorphes dans la section 8.1. Nous considérons dans la section 8.2 les strates ayant au moins un pôle d'ordre strictement inférieur à -2 . Dans la section 8.3 nous traitons les cas où tous les pôles sont d'ordre -2 .

8.1. Rappels sur les composantes connexes des strates. La classification complète des composantes des strates de différentielles quadratiques à été obtenue dans [CG21]. Nous rappelons les éléments clés pour la description des composantes connexes.

En genre 1, les composantes connexes des strates sont caractérisées par le nombre de rotation $\text{rot}(S)$ de la surface plate associée à la différentielle quadratique ξ . Une discussion détaillée est donnée dans la section 2.4 de [CG21]. Pour une surface plate S définie par une différentielle quadratique méromorphe de $\Omega^2 \mathcal{M}_1(a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p)$ avec une base symplectique de lacets lisses de l'homologie (α, β) le *nombre de rotation* est

$$\text{rot}(S) := \text{pgcd}(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_p, \text{Ind}(\alpha), \text{Ind}(\beta)),$$

où $\text{Ind}(\alpha)$ est l'indice de l'application de Gauss du lacet α . Notons que l'indice est égal au nombre de demi-tours effectués par le vecteur tangent à α . On a alors plus précisément le résultat suivant.

- i) Si $n = p = 1$, la strate est $\Omega \mathcal{M}_1(a; -a)$ avec $a \geq 2$ et chaque composante connexe correspond à un nombre de rotation qui est un diviseur strict de a .
- ii) Sinon, il existe une composante connexe correspondant à chaque nombre de rotation qui est un diviseur de $\text{pgcd}(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_p)$.

La composante de $\Omega^2 \mathcal{M}_1(\mu)$ associée au nombre de rotation $\text{rot} = \rho$ est notée $\Omega^2 \mathcal{M}_1^\rho(\mu)$. La restriction de l'application résiduelle $\mathfrak{R}_1^2(\mu)$ à cette composante est notée $\mathfrak{R}_1^{2,\rho}(\mu)$.

Le nombre de rotation peut être calculé de manière algébrique : voir la proposition 3.13 de [CG21]. De ce fait, on déduit directement le résultat suivant.

Lemme 8.1. *Une composante $\Omega^2 \mathcal{M}_1^\rho(\mu)$ paramètre des différentielles quadratiques primitives si et seulement si ρ est impair.*

Grâce à la proposition 2.6, nous pouvons éclater un zéro d'une différentielle. En lien avec les composantes connexes, il est très facile d'obtenir le résultat suivant.

Lemme 8.2. *Le nombre d'une rotation d'une différentielle ξ' obtenue en éclatant un zéro d'une différentielle de nombre de rotation ρ est égal à ρ modulo les ordres des nouveaux zéros.*

Afin de simplifier les énoncés dans les deux prochaines sections, nous introduisons la notation suivante.

Définition 8.3. Une composante de genre 1 qui possède au moins un pôle d'ordre strictement inférieur à -2 est *exceptionnelle* si elle est l'une des suivantes :

- (1) la composante primitive de $\Omega^2 \mathcal{M}_1(4a; (-4^a))$ ou $\Omega^2 \mathcal{M}_1(2a-1, 2a+1; (-4^a))$ pour tout $a \geq 1$;
- (2) la composante primitive de $\Omega^2 \mathcal{M}_1(2s; (-2^s))$ ou $\Omega^2 \mathcal{M}_1(s-1, s+1; (-2^s))$ avec s un entier pair non nul;
- (3) les composantes $\Omega^2 \mathcal{M}_1^1(6; -6)$, $\Omega^2 \mathcal{M}_1^1(3, 3; -6)$ et $\Omega^2 \mathcal{M}_1^3(12; -6, -6)$.

Le cas des strates de genre $g \geq 2$ est donné en détail dans [CG21]. Nous n'aurons pas besoin de la description précise de ces strates. Les résultats dont nous aurons besoin sont le fait que toutes les composantes connexes (même en genre 1) peuvent être obtenues en combinant la couture d'anse à partir d'une différentielle de genre zéro (proposition 6.3 de [CG21]) et l'éclatement de singularités (proposition 6.4 de [CG21]). De plus, la composante hyperelliptique est obtenue en cousant une anse de nombre de rotation maximal. L'autre composante est obtenue en cousant une anse de n'importe quel nombre de rotation strictement inférieur.

8.2. Différentielles avec un pôle d'ordre strictement inférieur à -2 . Dans cette section, nous considérons les strates avec au moins un pôle d'ordre strictement inférieur à -2 . Nous montrons tout d'abord que l'application résiduelle est surjective pour les composantes non exceptionnelles de genre 1 possédant un unique zéro. Dans le cas des composantes exceptionnelles, l'application résiduelle contient le complémentaire de l'origine (lemmes 8.4 et 8.5). Puis nous montrons la surjectivité des applications résiduelles de certaines strates quadratiques (lemme 8.6). Nous en déduisons la surjectivité de l'application résiduelle dans le cas général par éclatement de zéro et couture d'anse (lemme 8.7). Enfin nous montrons que l'origine n'appartient pas à l'image de l'application résiduelle des composantes exceptionnelles (lemmes 8.8, 8.9 et 8.10).

Commençons par le cas des strates de genre 1 avec un unique zéro et un unique pôle.

Lemme 8.4. *La restriction de l'application résiduelle $\mathfrak{R}_1^2(m; -m)$ à chaque composante non exceptionnelle est surjective pour $m \geq 3$. L'image de l'application résiduelle des composantes $\Omega^2 \mathcal{M}_1(4; -4)$ et $\Omega^2 \mathcal{M}_1^1(6; -6)$ contient \mathbb{C}^* .*

Démonstration. Si m est impair, la surjectivité de $\mathfrak{R}_1^{2,\rho}(m; -m)$ est équivalent au fait que la composante $\Omega^2 \mathcal{M}_1^\rho(m; -m)$ soit non vide. Ceci est une conséquence élémentaire du théorème d'Abel. À partir de maintenant, nous supposons que m est pair.

Une différentielle dans $\Omega^2 \mathcal{M}_1(2\ell, -2\ell)$ avec $\ell \geq 2$ et au moins un résidu non nul est donnée par le recollement de la partie polaire non triviale d'ordre 2ℓ et de type $(\rho-1)/2$ associée aux vecteurs $(v_1, v_2; -v_2, -v_1)$ comme représentés sur la figure 22. L'indice des lacets α_i qui relie les milieux des segments v_i est ρ . On en déduit que le nombre de rotation de la différentielle quadratique ainsi obtenue est égal à ρ .

Nous traitons maintenant le cas des composantes non exceptionnelles $\Omega^2 \mathcal{M}_1^\rho(2\ell; -2\ell)$ avec $\ell \geq 3$ et le résidu au pôle est nul. Une différentielle avec ces invariants locaux est obtenue à partir de deux parties polaires. La première est d'ordre ρ , de type $(\rho-1)/2$ et associée à $(v_1; v_2)$ avec $v_1 = v_2$. La seconde est d'ordre $\ell - \rho$, de type $\ell - \rho$ et associée à $(v_1; v_2)$. Nous

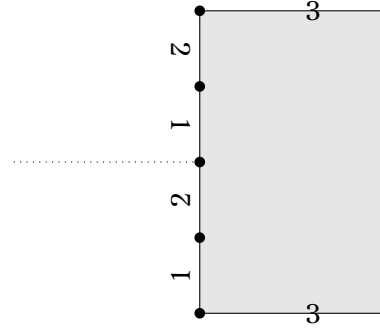


FIGURE 22. Différentielles de $\Omega^2 \mathcal{M}_1(4; -4)$ (en blanc) et $\Omega^2 \mathcal{M}_1(2; -2)$ (en gris)

coupons ces deux domaines polaires le long des demi-droites horizontales commençant au point final des v_i . Nous collons alors les fentes par translations et les vecteurs v_i entre eux par rotation. Cette construction est illustrée à droite de la figure 23 dans le cas de la composante $\Omega^2 \mathcal{M}_1^3(6; -6)$. L'indice des lacets α et β entre les milieux des v_i , comme représentés sur la figure 23, est égal à $\pm\rho$.



FIGURE 23. Différentielle de $\Omega^2 \mathcal{M}_1^3(6; -6)$ dont le résidu est nul

Cela donne une différentielle quadratique souhaitée, sauf dans le cas où le nombre de rotation est $\rho = 1$. Dans ce cas, on choisit $1 < \rho' < \ell - 1$ premier avec 2ℓ . Cela est toujours possible lorsque $\ell \geq 4$. On fait la même construction que ci-dessus et on obtient une différentielle quadratique de nombre de rotation $\text{pgcd}(\rho', \rho', 2\ell) = 1$. \square

Nous déduisons du résultat précédent le cas des strates de genre 1 avec un unique zéro mais un profil de pôles arbitraire.

Lemme 8.5. *Étant donnée $\mu = (a; -b_1, \dots, -b_p; -c_1, \dots, -c_r; (-2^s))$ une partition de 0 telle que $p+r \geq 2$ et ρ un nombre de rotation. Si $\mu \neq (4p; (-4^p))$, alors l'application résiduelle $\mathfrak{R}_1^{2,\rho}(\mu)$ est surjective. De plus, l'image de $\mathfrak{R}_1^2(4p, (-4^p))$ contient $\mathbf{C}^p \setminus \{0\}$.*

Démonstration. Nous commençons la preuve par le cas des strates connexes puis adaptons les arguments au cas non connexe.

Les strates connexes. Nous commençons par le cas où $r \geq 2$. On a montré dans les lemmes 3.2 et 3.4 que l'application résiduelle de $\Omega^2 \mathcal{M}_0(a-4; -b_1, \dots, -b_p; -c_1, \dots, -c_r; (-2^s))$ est surjective. On obtient donc la surjectivité de $\mathfrak{R}_1^{2,\rho}(\mu)$ par couture d'anse sauf dans le cas de la composante $\Omega^2 \mathcal{M}_1^1(6; -3, -3)$. Dans ce dernier cas, la surjectivité est équivalente au fait que cette composante est non vide.

Supposons maintenant qu'il existe un unique pôle d'ordre impair. Le lemme 3.4 dans le cas des strates $\Omega \mathcal{M}_0(a-4; -b_1, \dots, -b_p; -c; (-2^s))$ implique que $\mathbf{C}^p \setminus \{0\}$ est contenu dans l'image de $\mathfrak{R}_1^{2,\rho}(\mu)$ par couture d'anse. Il suffit donc de prouver que l'origine est dans l'image de l'application résiduelle. En particulier, ces strates ne possèdent pas de pôles d'ordre -2 . Nous choisissons un pôle d'ordre $-2\ell_1$ et nous lui associons une partie polaire d'ordre $2\ell_1$, de type $(\rho-1)/2$ associée aux vecteurs $(v_1, v_2, -2(v_1+v_2); -v_2, -v_1)$ avec $v_1 = v_2$. On associe aux autres pôles d'ordre pair les parties polaires d'ordres $2\ell_i$ associées aux vecteurs $(2(v_1+v_2); 2(v_1+v_2))$.

Au pôle d'ordre c , on choisit une partie polaire d'ordre c associée à $(2(v_1 + v_2), \emptyset)$. On colle alors les pôles d'ordre paire de manière cyclique et au bout le pôle d'ordre c . Enfin on identifie les vecteurs v_i ensemble. Les indices des lacets qui joignent les milieux des v_i est ρ . Comme ρ divise $2\ell_1$, on obtient toutes les composantes.

Il nous reste à traiter le cas où tous les pôles sont d'ordre pair. Nous commençons par construire une différentielle dans $\Omega^2 \mathcal{M}_1(a; -2\ell_1, \dots, -2\ell_p)$ dont tous les résidus sont nuls, sauf dans le cas où $\mu = (4p; (-4^p))$ et $\mu = (12; -6, -6)$ avec $\rho = 3$. L'idée générale est la suivante. Supposons que $\ell_1 \geq 3$ et partons de la différentielle de $\Omega^2 \mathcal{M}_1(2\ell_1; -2\ell_1)$ sans résidu donnée dans la preuve du lemme 8.4. On peut alors couper cette surface le long d'un lien-selle associé au vecteur v_1 . Par exemple, on coupe la différentielle de la figure 23 le long du lien-selle dénoté par 1. Pour tous les autres pôles on prend une partie polaire triviale d'ordre $2\ell_i$ associée à $(v_i; v_i)$. La surface obtenue en recollant les segments de manière cyclique, comme sur la figure 24, possède les invariants désirés.

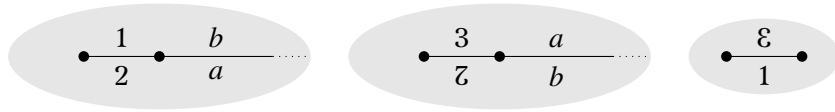


FIGURE 24. Différentielle de $\Omega^2 \mathcal{M}_1(10; -4, -6)$ dont le résidu est nul

Les strates non connexes. Notons que si la strate possède un pôle d'ordre -4 , alors elle est connexe. On supposera donc que les pôles sont d'ordres $-2\ell_i \leq -6$. Si tous les pôles sont d'ordre -6 , alors on procède de la façon suivante. Si $p = 2$, la construction ci-dessus donne une différentielle quadratique avec un nombre de rotation égal à 1. En effet, les indices des lacets sont respectivement 3 et 7. Supposons maintenant qu'il y a $p \geq 3$ pôles d'ordre -6 . On choisit le type des parties polaires de telle façon que l'indice du lacet qui les traverse est multiple de 3 pour obtenir le nombre de rotation 3 et n'est pas multiple sinon. Comme chaque pôle peut contribuer à l'indice par 2 ou 4 il est facile de vérifier que cela est toujours possible.

Les cas où il y a au moins trois pôles d'ordres identiques ou deux pôles d'ordres distincts sont obtenus de façon analogue. Nous allons donc nous concentrer sur le cas où il y a deux pôles d'ordres $-2\ell \leq -8$. Dans ce cas, pour les nombres de rotations $\rho < \ell$, la construction précédente fonctionne avec les adaptations nécessaires. Pour $\rho = \ell$, on prend trois vecteurs $v_1 = v_2 = v_3$ et on associe au premier pôle $\ell - 1$ parties polaires d'ordre 4 ouvertes à droite associées à $(v_1; v_2)$, $(\emptyset; v_2)$, $(v_3; \emptyset)$ et les autres associées à $(\emptyset; \emptyset)$. On colle ces parties polaires de manière cyclique de sorte que l'indice entre les milieux des segments v_2 est ℓ et entre les milieux des segments v_1 et v_3 est $i < \ell$. Pour le second pôle, on considère la partie polaire d'ordre 2ℓ et de type $(\rho - i)/2$ associée à $(v_3; v_1)$. En collant les segments de même label, on obtient une différentielle quadratique avec les invariants souhaités. Cette construction est représentée dans la figure 25 dans le cas $\ell = 5$.

Nous traitons maintenant les strates $\Omega^2 \mathcal{M}_1(a; -2\ell_1, \dots, -2\ell_p; (-2^s))$, telles que $s \neq 0$ ou $s = 0$ et avec au moins un résidu non nul. Dans le cas où le résidu d'un pôle est nul, alors nous supposons que le résidu de P_1 est nul. Considérons les pôles P_i avec $2 \leq i \leq p'$ qui possèdent un résidu R_i non nul. Nous associons à P_i la partie polaire non triviale d'ordre $2\ell_i$ associée à $(r_i; \emptyset)$ où r_i est une racine carrée de R_i de partie réelle positive (ou de partie imaginaire positive si la partie réelle est nulle). Considérons maintenant les pôles P_j avec $j > p'$ ayant un résidu nul. Nous associons la partie polaire triviale d'ordre $2\ell_j$ associée à $(r_{ij}; r_{ij})$ pour un résidu quadratique $R_{ij} \neq 0$. Puis nous collons le segment r_i du domaine positif de P_i au segment r_{ij} du domaine basique négatif de P_j .

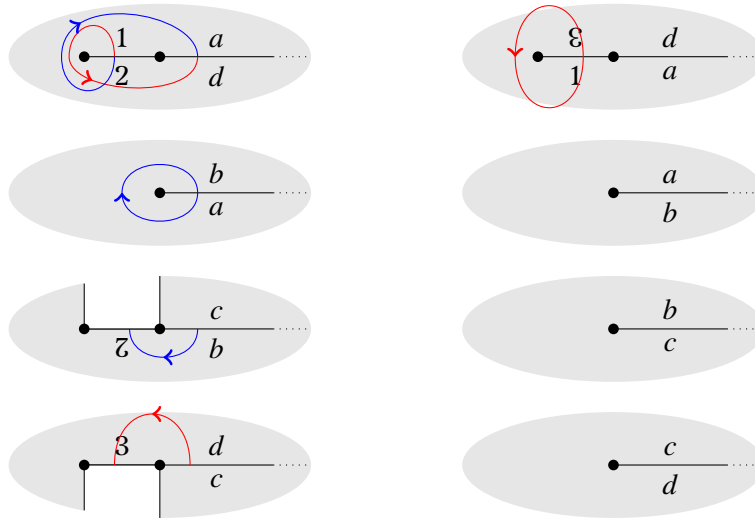


FIGURE 25. Différentielle de $\Omega^2 \mathcal{M}_1(20; -10, -10)$ dont les résidus sont nuls et de nombre de rotation 5

Enfin, pour le pôle P_1 nous procédons à la construction suivante. Notons que la somme des r_i est non nulle. Nous supposons que les r_i sont ordonnés par argument croissant. Nous prenons pour P_1 la partie polaire de type $2\ell_1$ et de tupe $(\rho - 1)/2$ associée à $(v_1, v_2; -v_2, -v_1, r_2, \dots, r_p)$ où les v_i vérifient les égalités $v_1 = v_2$ et $r_1 = 2v_1 + 2v_2 - \sum_{i \geq 2} r_i$.

La différentielle est obtenue en identifiant par translation les bords r_i des domaines polaires positifs aux segments r_i de la partie polaire négative de P_1 . Enfin, nous identifions par rotation d'angle π et translation, le premier v_1 au premier v_2 et le second v_1 au second v_2 . Cela donne une différentielle quadratique primitive avec les invariants souhaités. Un exemple est donné dans la figure 26. \square

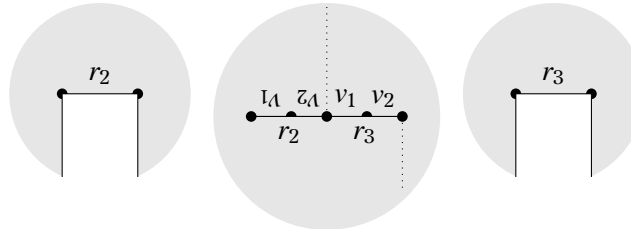


FIGURE 26. Différentielle de $\Omega^2 \mathcal{M}_1(12; (-4^3))$ dont les résidus sont $(0, 1, 1)$

Nous traitons maintenant le cas des strates avec deux zéros et des pôles d'ordre -4 .

Lemme 8.6. *Pour tout $p \geq 1$ et tout $(a_1, a_2) \neq (2p + 1, 2p - 1)$, l'image des applications résiduelles $\mathfrak{R}_1^2(a_1, a_2; (-4^p))$ et $\mathfrak{R}_2^2(4(p + 1); (-4^p))$ contiennent l'origine.*

Démonstration. Pour commencer la figure 27 fournit une différentielle quadratique primitive ayant un résidu nul dans chacune des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_1(5, -1; -4)$ et $\Omega^2 \mathcal{M}_1(2, 2; -4)$ (en gris).

Nous prouvons maintenant le résultat pour les strates $\Omega^2 \mathcal{M}_1(a_1, a_2; (-4^p))$ satisfaisant $(a_1, a_2) \neq (2p + 1, 2p - 1)$ par récurrence sur le nombre p de pôles. L'hypothèse de récurrence est la suivante. Il existe une différentielle quadratique primitive dont les résidus sont nuls dans toutes les strates de cette forme avec $p - 1$ pôles telles que si $a_1 = -1$, alors il existe un lien-selle fermé reliant le zéro d'ordre a_2 à lui-même et dans tous les cas il existe un lien-selle entre les deux zéros. L'hypothèse de récurrence est satisfaite pour $p = 1$ par

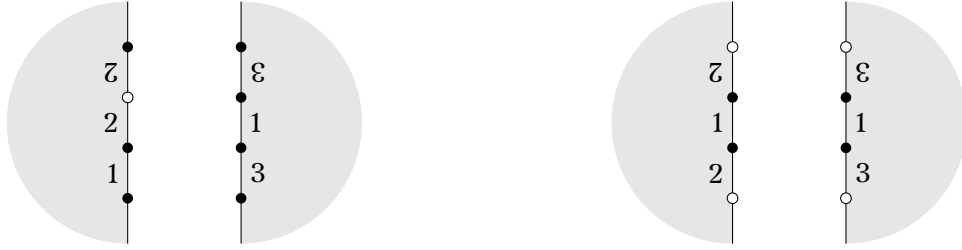


FIGURE 27. Différentielles des strates $\Omega^2\mathcal{M}_1(5, -1; -4)$ et $\Omega^2\mathcal{M}_1(2, 2; -4)$ dont le résidu est nul en gris. Différentielles de $\Omega^2\mathcal{M}_1(5, -1; (-2^2))$ et $\Omega^2\mathcal{M}_1(2, 2; (-2^2))$ dont le résidu est (1, 1) en blanc.

les différentielles quadratiques représentées dans la figure 27. Nous allons construire des différentielles satisfaisant à l'hypothèse de récurrence avec p pôles.

Si $(a_1, a_2) = (4p+1, -1)$, coupons la différentielle quadratique de $\Omega^2\mathcal{M}_1(4p-3, -1; (-4^{p-1}))$ donnée par l'hypothèse le long du lien-selle entre le zéro d'ordre $4p-3$. Prenons une partie polaire d'ordre 4 associée à $(v; v)$ où v est la période de ce lien-selle. La surface formée en collant les bords de ces surfaces par translation est dans $\Omega^2\mathcal{M}_1(4p+1, -1; (-4^p))$, ces résidus sont nuls et possède un lien-selle fermé reliant le zéro d'ordre $4p+1$ à lui-même et entre les deux zéros.

Si $(a_1, a_2) \neq (4p+1, -1), (2p+1, 2p-1)$, la construction du paragraphe précédent en partant d'une différentielle de $\Omega^2\mathcal{M}_1(a_1-2, a_2-2; (-4^{p-1}))$ et du lien-selle entre les deux zéros donne une différentielle quadratique ayant les propriétés souhaités.

Une différentielle quadratique dans la strate $\Omega^2\mathcal{M}_2(4(p+1); (-4^p))$ sans résidus aux pôles est donnée de la façon suivante. Le lemme 8.5 fournit une différentielle primitive de la strate $\Omega^2\mathcal{M}_1(4(p+1); (-4^p); -2, -2)$ telle que les résidus aux pôles d'ordre -4 sont nuls et les résidus quadratiques aux pôles doubles sont égaux entre eux. Nous formons une 2-différentielle entrelacée en collant les deux pôles d'ordre -2 ensemble. Cette différentielle quadratique entrelacée peut être lissée sans changer les résidus aux pôles d'ordre -4 (voir proposition 2.4) pour donner une différentielle quadratique ayant les invariants souhaités. \square

Nous montrons maintenant que l'application résiduelle de toutes les composantes non exceptionnelles sont surjectives.

Lemme 8.7. *L'application résiduelle des composantes non exceptionnelles de $\Omega^2\mathcal{M}_g(\mu)$ avec $g \geq 1$ est surjective.*

Démonstration. Si μ possède un unique zéro on obtient les différentielles dans les composantes souhaitées par couture d'anses à partir des différentielles quadratiques de genre 1 ayant un unique zéro. Cela suit du fait que chaque composante connexe peut être obtenue de la sorte à partir d'une différentielle de genre 1 et de la proposition 2.7. La surjectivité de l'application résiduelle est une conséquence de la surjectivité des applications résiduelles de ces strates (voir lemme 8.4 et 8.5), à l'exception des strates de la forme $\Omega^2\mathcal{M}_g(a; (-4^p))$ et éventuellement de certaines composantes $\Omega^2\mathcal{M}_g(6+4g; -6)$ et $\Omega^2\mathcal{M}_g(12+4g; -6, -6)$. Dans ces cas la configuration de résidus $(0, \dots, 0)$ est obtenue en partant des strates $\Omega^2\mathcal{M}_2(4(p+1); (-4^p))$ et en utilisant le lemme 8.6. D'après le Théorème 1.3 de [CG21], les strates primitives $\Omega^2\mathcal{M}_g(12+4g; -6, -6)$ sont connexes et donc il suffit de partir de la composante $\Omega^2\mathcal{M}_1(12; -6, -6)$. La strate $\Omega^2\mathcal{M}_2(10; -6)$ possède une composante hyperelliptique et une composante hyperelliptique. De plus, chaque composante peut être obtenue en collant une anse à une différentielle quadratique de la composante $\Omega^2\mathcal{M}_2^3(6; -6)$. Dans les notations de [CG21], la non hyperelliptique peut être obtenue via l'opération en collant une anse de nombre de rotation 1 et l'hyperelliptique une anse de nombre de rotation 3. La surjectivité pour ces composantes suit directement de la surjectivité dans ce cas. Le cas

des strates de genres supérieurs s'obtient en collant une anse à l'une des composantes de $\Omega^2\mathcal{M}_2(10; -6)$.

Considérons les strates $\Omega^2\mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n; -c_i; -b_j; (-2^s))$ avec $n \geq 2$ zéros. La surjectivité de l'application résiduelle est obtenue en éclatant l'unique zéro des différentielles quadratiques de la strate $\Omega^2\mathcal{M}_g(\sum a_i; -c_i; -b_j; (-2^s))$ (voir proposition 2.6), sauf éventuellement pour $\Omega^2\mathcal{M}_1(a_1, \dots, a_n; (-4^p))$, $\Omega^2\mathcal{M}_1^1(a_1, \dots, a_n; -6)$ et $\Omega^2\mathcal{M}_1^3(a_1, \dots, a_n; -6, -6)$ avec $n \geq 2$. Dans le cas $\Omega^2\mathcal{M}_1(a_1, a_2; (-4^p))$ la surjectivité a été démontrée dans le lemme 8.6. Notons que la seule strate $\Omega^2\mathcal{M}_1(a_1, a_2; -6)$ qui possède une composante de nombre de rotation égal à 3 est $\Omega^2\mathcal{M}_1(3, 3; -6)$.

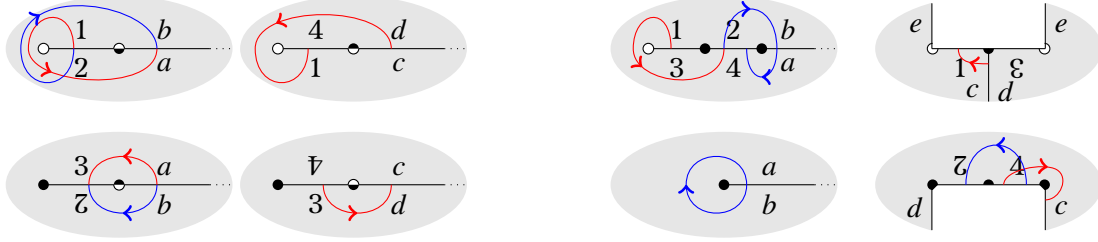


FIGURE 28. Différentielle de résidus nuls dans $\Omega^2\mathcal{M}_1^3(6, 6; -6, -6)$ à gauche et dans $\Omega^2\mathcal{M}_1^3(3, 9; -6, -6)$ à droite

Dans le cas $\Omega^2\mathcal{M}_1(a_1, a_2; -6, -6)$, notons que la seule strate qui possède une composante de nombre de rotation égal à 3 satisfait $(a_1, a_2) = (3, 9)$ ou $(a_1, a_2) = (6, 6)$. Une différentielle quadratique dans chacune de ces composantes avec un résidu nul est représentée dans la figure 28. Dans tous les cas, pour $n \geq 3$, il suffit d'éclater l'un des deux zéros de ces différentielles pour obtenir la surjectivité. \square

Les trois lemmes suivants montrent que l'origine n'appartient pas à l'image de l'application résiduelle des composantes exceptionnelles.

Lemme 8.8. *Il n'existe pas de différentielle quadratique dans les composantes $\Omega^2\mathcal{M}_1^1(6; -6)$, $\Omega^2\mathcal{M}_1^1(3, 3; -6)$ et $\Omega^2\mathcal{M}_1^3(12; -6, -6)$ dont les résidus sont nuls.*

Démonstration. Supposons qu'il existe une différentielle dans l'une de ces composantes dont tous les résidus sont nuls. Dans ce cas la proposition 2.8 implique qu'il existe une telle différentielle ξ dont tous les liens-selles sont horizontaux. La proposition 6.2 de [CG21] implique que ξ est obtenue en recollant des demi-plans dont le bord est formé de segments horizontaux. Nous faisons maintenant une analyse pour chaque composante.

Le cas de la strate $\Omega^2\mathcal{M}_1^1(6; -6)$. La différentielle ξ est obtenue en collant quatre demi-plans qui possèdent un total de quatre segments au bord. Nous obtenons une surface à bord en collant les demi-droites par rotation. Nous numérotions les demi-plans de manière cyclique. Comme le résidu est nul et la différentielle est primitive, les segments d'une paire sont au bord des demi-plans paires et les autres segments des demi-plans impairs. Les paires de segments ne peuvent pas être dans un même demi-plan car la différentielle ainsi formée posséderait un pôle simple. On en déduit que la seule différentielle que l'on peut obtenir avec ces invariants est celle représentée sur la figure 23 dont le nombre de rotation est égal à 3.

Le cas de la strate $\Omega^2\mathcal{M}_1^1(3, 3; -6)$. La différentielle ξ est obtenue en recollant 4 demi-plans dont les bords sont formés d'un total de 6 segments horizontaux identifiés deux à deux. Nous numérotions les demi-plans de manière cyclique. Comme tous les liens-selles bordent le domaine polaire, deux liens-selles relient les deux zéros et un lien-selle est fermé. Nous notons les segments associés aux deux premiers liens-selles par a et b , et les segments associés au dernier par c .

Supposons que les quatre segments a et b sont dans des demi-plans de même parité. Une base de l'homologie est donnée par deux lacets qui relient respectivement les a et les segments b entre eux. Comme le nombre de rotation est 1, on peut supposer que les segments a appartiennent au même demi-plan. Afin d'obtenir une singularité d'angle 5π , il faut que les quatre segments a et b soient dans le même demi-plan. Comme le résidu est nul les segments c sont dans les demi-plans de l'autre parité. En faisant tendre la longueur de a vers zéro et en agrandissant b de la même quantité, on obtient une différentielle de $\Omega^2\mathcal{M}_1^1(6; -6)$ dont le résidu est nul, ce qui est absurde.

Supposons que les segments a soient dans des demi-plans de même parité (disons pair) et les b dans des demi-plans de parité distincte. Comme le résidu est nul les segments c sont dans les demi-plans impairs. On peut alors faire tendre la longueur des segments b afin d'obtenir une différentielle de $\Omega^2\mathcal{M}_1^1(6; -6)$ dont le résidu est nul.

Supposons que les segments a et les segments b soient dans deux demi-plans de parités distinctes. Comme le résidu est nul, les segments c sont aussi dans demi-plans de parité distinctes. On obtient donc le carré d'une différentielle abélienne.

Enfin, supposons les segments a et b sont dans la même parité, mais l'une distincte de l'autre. Si les segments de c sont de la même parité, on peut fusionner les deux zéros comme précédemment. Si les segments de c sont dans des demi-plans de parité distincte, alors l'unique configuration possible pour de tels segments donne une différentielle dont les zéros d'ordres $(2, 4)$. Cela conclut la preuve de ce cas.

Le cas de la strate $\Omega^2\mathcal{M}_1^3(12; -6, -6)$. La différentielle ξ est obtenue en recollant 8 demi-plans, partitionnés en deux ensembles de 4 demi-plans collés ensemble, formant deux domaines polaires. Les bords sont formés d'un total de 6 segments horizontaux. Comme les résidus sont nuls, les domaines polaires sont bordés soit par 2 et 4 segments respectivement, soit les deux par 3 segments.

Dans le premier cas, considérons le domaine bordé par deux segments a et b . Notons que a et b ne sont pas identifiés l'un à l'autre car sinon la surface serait non connexe. Comme le résidu est nul, les segments a et b sont dans des demi-plans de parité distinctes. Maintenant l'autre domaine polaire est bordé des segments a , b et de deux segments c . Si a et b sont dans des demi-plans de parité différentes alors les deux c sont dans des demi-plans de parités différentes. On a donc le carré d'une différentielle quadratique. Si les a et b sont dans le même demi-plan, alors comme le résidu est nul les deux c sont dans les demi-plans de l'autre parité. Donc cette différentielle possède au moins deux singularités. Enfin si a et b sont dans deux demi-plans distincts mais de même parité, alors les c sont chacun dans un demi-plan de l'autre parité. La différentielle ainsi formée possède les invariants souhaités à l'exception du nombre de rotation qui est égal à 1.

Dans le second cas, soit un segment de a , b et c borde chacun des domaines polaires, soit un domaine est bordé par les deux segments a et un c et l'autre par les deux segments b et l'autre c . Dans le premier cas, comme les résidus sont nuls, on a deux segments au bord du premier domaine polaire qui sont dans des demi-plans de même parité et l'autre dans un de parité différente. Cette propriété est aussi satisfaite dans l'autre domaine polaire. On obtient donc le carré d'une différentielle abélienne. Dans le second cas, le bord du premier domaine est formé de deux segments a et un c et le second domaine polaire de deux segments b et le second c . Comme le résidu est nul, les segments a sont dans des demi-plans de même parité et c de l'autre. De plus, les deux a sont dans deux demi-plans distincts, car sinon il y aurait un pôle simple. Les mêmes considérations s'appliquent à l'autre pôle. Toutes les différentielles qui peuvent être réalisées de cette façon possèdent au moins deux zéros. \square

Lemme 8.9. *Pour tout $p \geq 1$ il n'existe pas de différentielle quadratique primitive dans la strate $\Omega^2\mathcal{M}_1(4p; -4^p)$ dont tous les résidus quadratiques sont nuls.*

Démonstration. Considérons tout d'abord le cas de la strate $\Omega^2\mathcal{M}_1(4; -4)$. Si elle contenait une différentielle quadratique (primitive) dont le résidu est nul, alors on pourrait former une

différentielle quadratique entrelacée lissable en collant au pôle le carré d'une différentielle abélienne de la strate $\Omega\mathcal{M}_1(\emptyset)$. D'après le lemme 2.5, le lissage produirait une différentielle quadratique primitive dans $\Omega^2\mathcal{M}_2(4)$, ce qui n'existe pas (voir [MS93]).

Supposons par l'absurde qu'il existe une différentielle quadratique (primitive) ξ dans $\Omega^2\mathcal{M}_1(4p; (-4^p))$ pour $p \geq 2$ dont tous les résidus soient nuls. D'après la proposition 2.8, on peut supposer que tous les liens-selles sont horizontaux. Cette surface possède alors $p + 1$ liens-selles et chaque domaine polaire est bordé par au moins deux liens-selles (sinon son résidu serait non nul). On en déduit que le graphe d'incidence associé peut être de l'une des deux formes suivantes.

- i) Il y a un sommet de valence 4 et les autres sont de valence 2.
- ii) Il y a deux sommets de valence 3, et les autres sont de valence 2.

Nous pouvons simplifier ξ de la manière suivante. Prenons un domaine polaire bordé par deux liens-selles. Coupons ξ le long de ces liens-selles, enlevons ce pôle et recollons le deux segments au bord que nous venons de créer. La différentielle que nous venons de créer est encore primitive, sans résidus et dans la strate $\Omega^2\mathcal{M}_1(4(p-1); (-4^{p-1}))$.

Considérons une différentielle ξ dont le graphe d'incidence possède un pôle de valence 4. En répétant l'opération du paragraphe précédent jusqu'à avoir éliminé tous les pôles de valence 2, on obtient une différentielle quadratique primitive sans résidu dans $\Omega^2\mathcal{M}_1(4; -4)$. Cela montre que ξ ne peut pas avoir de graphe d'incidence avec un sommet de valence 4.

Supposons que le graphe d'incidence de ξ possède deux pôles de valence 3. En répétant l'opération du paragraphe précédent nous pouvons obtenir deux graphes. Dans le premier cas, deux sommets sont reliés entre eux par trois arêtes. Dans le second cas, les deux sommets sont reliés entre eux par une unique arête et ont chacun une boucle. Remarquons que dans les deux cas, le fait que le résidu quadratique est nul et les liens-selles sont horizontaux implique que l'un des liens-selles est strictement plus long que les deux autres. Les deux liens-selles les plus courts se trouvent du même côté du segment formé par le bord d'un domaine polaire. Ces deux segments ne peuvent pas être identifiés ensemble car la surface obtenue aurait un zéro d'ordre -1 . Cela exclut le graphe avec des boucles. Dans l'autre cas, la surface est obtenue par identification par des translations uniquement (pas de rotations) et n'est donc pas primitive. \square

Lemme 8.10. *L'image de l'application résiduelle $\mathfrak{R}_1^2(2p-1, 2p+1; (-4^p))$ ne contient pas l'origine.*

Démonstration. Considérons tout d'abord le cas de la strate $\Omega^2\mathcal{M}_1(1, 3; -4)$. S'il y avait une différentielle quadratique dans cette strate dont le résidu est nul, alors on pourrait former une différentielle quadratique entrelacée lissable en collant au pôle le carré d'une différentielle abélienne de $\Omega\mathcal{M}_1(\emptyset)$. Par le lemme 2.5, le lissage donnerait une différentielle quadratique dans $\Omega^2\mathcal{M}_2(1, 3)$, qui est vide (voir [MS93]).

Nous supposons par l'absurde qu'il existe une différentielle quadratique ξ dans la strate $\Omega^2\mathcal{M}_1(2p-1, 2p+1; (-4^p))$ dont tous les résidus sont nuls. D'après la proposition 2.8, on peut supposer que tous les liens-selles sont horizontaux.

Rappelons que le graphe d'incidence et le graphe d'incidence simplifié de ξ ont été introduit dans la section 2.4. Les sommets du graphe d'incidence de valence supérieure ou égale à trois sont dits *spéciaux*. Remarquons qu'un domaine polaire ne peut pas être bordé par un unique lien-selle, sinon le résidu de ce pôle serait non nul (ie, le graphe d'incidence n'a pas de sommet de valence 1). Les graphes d'incidence simplifiés peuvent être de l'une des formes suivantes. Soit le graphe possède un sommet de valence (6), soit deux sommets de valences respectives (5, 3) ou (4, 4), soit trois sommets de valences respectives (4, 3, 3), ou quatre sommets de valences (3, 3, 3, 3).

Le reste de la preuve se présente en deux étapes. Tout d'abord nous simplifions la surface ξ . Nous obtiendrons une *surface réduite*, c'est à dire une différentielle quadratique

de $\Omega^2\mathcal{M}_1(2p-1, 2p+1; -4^p)$ dont tous les résidus sont nuls, le cœur est dégénéré et les deux extrémités du bord des domaines polaires de valence 2 et 3 correspondent au zéro d'ordre $2p-1$. Ensuite nous montrons que les surfaces réduites n'existent pas en considérant les graphes d'incidence possibles.

Obtenir une surface réduite. Nous décrivons maintenant la procédure qui associe à ξ une surface réduite. Prenons un domaine polaire de valence 2 bordé par deux liens-selles joignant le zéro d'ordre maximal ou les deux zéros. Coupons ξ le long de ces deux liens-selles, supprimons ce pôle et collons les deux segments que nous avons créés. Cette opération fait diminuer l'ordre du zéro d'ordre maximal de 4 ou ceux des deux zéros de 2 suivant le cas. Dans les deux cas nous obtenons un élément de la strate $\Omega^2\mathcal{M}_1(2p-1, 2p-3; -4^{p-1})$. Remarquons que l'opération qui fait diminuer l'ordre du zéro maximal par 4 rend ce zéro d'ordre strictement inférieur à l'autre.

Prenons un sommet de valence 3. Il n'y a pas d'arête reliant ce sommet à lui-même, sans quoi l'une des extrémité du segment en question est une singularité conique de degré -1 (si les deux bords identifiés sont du même côté de la fente) ou de degré 0 (s'ils sont de part et d'autre de la fente). De plus, on suppose que les extrémités de la fente du domaine polaire correspondent aux deux zéros ou au zéro d'ordre maximal. Nous coupons ξ le long de ces trois liens-selles et supprimons ce pôle. La surface que nous obtenons a un bord constitué de trois segments v_1, v_2 et v_3 avec $v_1 = v_2 + v_3$. Nous collons v_2 et v_3 sur v_1 en préservant les extrémités de la fente (cela va créer une singularité sur v_1). Cette opération diminue l'ordre des deux zéros de 2 ou le zéro d'ordre maximal par 4 (et ce zéro devient le zéro d'ordre minimal).

Nous appliquons les opérations décrites dans les deux paragraphes précédent sur ξ jusqu'à ce que aucune ne soit possible. La surface que nous obtenons est soit réduite, soit possède un unique pôle. Dans ce second cas, on obtiendrait une différentielle quadratique sans résidu dans $\Omega^2\mathcal{M}_1(1, 3; -4)$. Ceci étant absurde, on supposera que la surface est réduite avec un nombre de pôles supérieur ou égal à deux.

Un lemme technique. Nous aurons besoin du résultat suivant sur les liens-selles contiguës dans les surfaces réduites. Deux lien-selles adjacents ne peuvent pas être les extrémités d'une boucle formée de pôles de valence 2 du graphe d'incidence. En effet, supposons que les liens-selles adjacents sont du même côté de la fente. Dans ce cas, le zéro correspondant à leur point d'intersection est différent du zéro correspondant aux autres extrémités de ces segments car le recollement des segments identifie ce sommet avec exactement une des extrémités dans la cicatrice dans chacun des domaines polaires correspondant aux sommets de valence 2 dans la boucle et c'est tout. Comme la surface est réduite, la boucle ne contient pas de sommets de valence deux. Ainsi le zéro au point d'intersection est d'ordre -1 . Mais aucune des strates que nous considérons n'a un zéro d'ordre -1 . Supposons maintenant que les deux liens-selles se rencontrent de part et d'autre de l'extrémité de la cicatrice. Le fait que la surface soit réduite implique que la boucle ne contient pas de sommets de valence 2. Cela implique que le bout de la cicatrice est un point régulier. Cela conclut la preuve de ce résultat élémentaire.

Analyse des surfaces réduites. Nous traitons maintenant tous les cas possibles en fonction des valences des sommets spéciaux des graphes d'incidence des surfaces réduites. Remarquons que ceux-ci sont analogues aux graphes simplifiés avec la différence qu'il peut rester quelques sommets de valence deux qui ne contribuent qu'au zéro d'ordre minimal.

Nous commençons par le cas où tous les sommets spéciaux sont de valence 3. Comme la surface est réduite, le zéro correspondant au bout des fentes des domaines polaires est d'ordre minimal. Toutefois, ce zéro est clairement d'ordre supérieur ou égal à l'autre zéro, ce qui est absurde.

Dans le cas où un pôle est de valence 4 et deux autres sont de valence 3, chaque sommet de valence 3 contribue à $2\pi + 2\pi = 4\pi$ pour l'angle du zéro minimal, qui possède donc un

angle minimal de 8π . D'un autre côté, l'angle du zéro maximal est d'angle au plus 7π . En effet, chaque pôle de valence 3 contribue d'un angle π et celui de valence 4 d'au plus 4π . Cela donne une contradiction.

Nous traitons maintenant le cas des graphes d'incidence avec deux pôles spéciaux de valence 4. Le premier graphe possède une boucle à chaque pôle de valence 4 et deux arêtes les joignant. Le second graphe possède simplement quatre arêtes entre ces deux sommets. Remarquons qu'a priori, il peut y avoir des sommets de valence 2 sur ces arêtes.

Considérons le graphe avec deux boucles. Aux sommets spéciaux, soit il y a deux segments de part et d'autre de la fente, soit un côté contient trois liens-selles et l'autre un. Dans un sommet spécial où il y a deux liens-selles de part et d'autre du segment, les liens-selles correspondant aux boucles ne peuvent pas être du même côté. On en déduit facilement que la seule identification possible donne une surface à holonomie triviale. De plus, le fait que les résidus quadratiques soient nuls implique que les deux sommets spéciaux sont simultanément de la même forme. Supposons maintenant qu'il y ait trois liens-selles d'un côté de chaque fente. Comme les liens-selles des boucles ne peuvent pas être adjacents, les extrémités des fentes correspondent au même zéro. Ce pôle est donc d'ordre pair (quel que soit le nombre de pôles de valence deux sur les arêtes), ce qui est absurde.

Nous considérons enfin le graphe où les deux sommets spéciaux sont reliés par quatre arêtes contenant éventuellement des sommets de valence 2. Dans ce cas, les deux sommets spéciaux sont simultanément de la même forme. S'il y a trois segments d'un côté et un de l'autre, alors la surface est non primitive. Ainsi nous considérons le cas avec deux liens-selles de part et d'autre de la fente. Remarquons qu'il n'y a pas de sommets de valence 2 sur les arêtes. Sinon il existerait des liens-selles fermés attachés au zéro d'ordre minimal. Cela implique que 6 des 12π des domaines spéciaux contribuent à ce zéro. Cela est clairement impossible. Donc on obtient une différentielle quadratique dans la strate $\Omega^2\mathcal{M}_1(5, 3; (-4^2))$. Le zéro d'ordre maximal est d'angle 7π et le minimal de 5π . Ceci implique que chaque zéro occupe précisément deux angles dans chaque domaine spécial. Si ces deux angles sont aux extrémités d'un même lien-selle, les deux zéros sont d'angle 6π . S'ils sont opposés dans les deux domaines polaires, alors leur angle est un multiple pair de π . On a obtenu la contradiction souhaitée.

Nous regardons maintenant les graphes avec un sommet de valence 5 et un de valence 3. Remarquons qu'il n'y a pas de boucle au sommet de valence 3. Sinon les liens-selles formant les extrémités de cette boucle seraient adjacents. Donc le graphe est formé de trois arêtes reliant les deux sommets spéciaux et d'une boucle au sommet de valence 5 (et éventuellement d'autres sommets de valence 2). Dans le domaine de valence 5, il n'est pas possible qu'un unique segment se trouve d'une part de la fente. Sinon ce lien-selle ne pourrait border ni la boucle ni l'une des trois arêtes connectant au pôle de valence 3. En effet, ce lien-selle ne peut être homologue à aucun autre segment et à aucune somme de deux des quatre autres segments.

Donc il y a trois liens-selles d'un côté et deux de l'autre. De plus, les liens-selles bordant la boucle se trouvent du même côté de la fente (pour des raisons de primitivité). Elle est donc formée en identifiant les deux segments extérieurs du côté de la fente qui contient trois segments. Mais il est alors aisé de vérifier que toutes les différentielles quadratiques dont les résidus quadratiques sont nuls que nous pouvons obtenir possèdent un unique zéro.

Pour terminer, nous considérons le cas d'un graphe d'incidence avec un unique pôle de valence 6. Le bord de ce domaine polaire est composé de six segments rangés en trois paires de longueurs identiques. Comme deux segments de la même paire ne peuvent pas être adjacents, il y a trois segments de part et d'autre de la fente. Si il y avait un segment de chaque paire de part et d'autre de la fente, alors la surface serait non primitive. Donc les liens-selles doivent être de la forme $A_1B_1A_2$ d'un côté et $C_1B_2C_2$ de l'autre. Dans ce cas, il

est facile de constater que les zéros sont d'ordres pairs. Cette dernière contradiction conclut la preuve. \square

8.3. Différentielles dont tous les pôles sont doubles. Dans cette section, nous considérons les strates $\Omega^2 \mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n; (-2^s))$ avec $g \geq 1$. Notons que la composante paramétrant les différentielles quadratiques primitives est connexe en genre 1 et peut être non connexe en genre $g \geq 2$ (voir [CG21]). Nous commençons par traiter le cas des strates de genre 1 avec un unique zéro. Nous montrons dans le lemme 8.11 que l'application résiduelle contient toutes les configurations de résidus quadratiques sauf si tous les résidus sont colinéaires. Puis nous montrons dans le lemme 8.12 que la seule exception en genre 1 peut être les résidus quadratiques proportionnels à $(1, \dots, 1)$ dans $\Omega^2 \mathcal{M}_1(2s; (-2^s))$ avec s pair. Puis nous montrons dans le lemme 8.13 que $(1, \dots, 1)$ est dans l'image de l'application résiduelle des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_1(a_1, a_2; (-2^s))$ avec $(a_1, a_2) \neq (s-1, s+1)$ et s pair. Les composantes générales sont traitées dans le lemme 8.14. Enfin nous prouvons dans les lemmes 8.15 et 8.16 que les résidus quadratiques $(1, \dots, 1)$ ne sont pas dans l'image de l'application résiduelle des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_1(2s; (-2^s))$ et $\Omega^2 \mathcal{M}_1(s-1, s+1; (-2^s))$ avec s pair.

Nous commençons par traiter le cas des strates en genre 1 avec un unique zéro.

Lemme 8.11. *L'application résiduelle de $\Omega^2 \mathcal{M}_1(2s; (-2^s))$ est surjective pour $s = 1$ et contient les configurations de résidus (R_1, \dots, R_s) telles qu'il existe R_i et R_j vérifiant $\frac{R_i}{R_j} \notin \mathbf{R}_+$ pour $s \geq 2$.*

Démonstration. La figure 22 montre que la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_1(2; -2)$ est non vide. Nous supposons donc que les strates ont $s \geq 2$ pôles d'ordre -2 . Par hypothèse, il existe des racines carrées r_i des R_i qui génèrent \mathbf{C} comme \mathbf{R} -espace vectoriel. Sans perte de généralité, on peut supposer que l'argument de chaque r_i est dans $]-\pi, 0]$. Nous concaténons alors les r_i par argument croissant. L'intérieur de ce segment brisé se trouve dans le demi-plan supérieur ouvert déterminé par la droite (DE) où D et E sont respectivement les points initial et final de la concaténation. Nous joignons D à E par quatre segments v_i d'égale longueur de la façon suivante. Le segment brisé est formé en concaténant les v_i par i croissant avec $v_1 = v_2$, $v_3 = v_4$ et l'angle en au dessus de l'intersection entre v_2 et v_3 est égal à π . Notons que ce segment brisé se trouve dans le demi plan inférieur à la droite (DE) .

Nous collons maintenant des demi-cylindres infinis aux segments r_i de ce polygone. La surface plate est obtenue en collant v_1 à v_3 et v_2 à v_4 par translation et rotation. On vérifie facilement que cette différentielle possède un unique zéro. De plus, la différentielle associée est primitive de genre 1 car on la déconnecte en coupant les courbes correspondant aux v_i et une autre courbe fermée quelconque. \square

Lemme 8.12. *L'application résiduelle de $\Omega^2 \mathcal{M}_1(2s; (-2^s))$ est surjective si s est impair et contient $\mathcal{R}_1^2(2s; (-2^s)) \setminus \mathbf{C}^* \cdot (1, \dots, 1)$ si s est pair.*

Démonstration. D'après le lemme 8.11, il suffit de considérer le cas où les résidus quadratiques (R_1, \dots, R_s) sont des nombres réels strictement positifs. On dénote par r_i la racine positive de R_i .

Dans le cas où s est impair, nous classons les r_i par ordre croissant. Coupons le segment de longueur r_1 en deux segments de longueur ϵ et $r_1 - \epsilon$. Ensuite, nous coupons le segment de longueur r_2 en deux segments de longueur $r_1 - \epsilon$ et $r_2 - r_1 + \epsilon$ en identifiant le premier avec le second du découpage précédent. Nous procédons ainsi pour les $s-1$ premiers cylindres et obtenons en bout de chaîne un segment de longueur $(r_{s-1} - r_{s-2}) + \dots + (r_2 - r_1) + \epsilon$. Le dernier cylindre est découpé en quatre segments. Le premier d'entre eux est identifié à celui que nous venons d'obtenir. Les trois autres segments se répartissent une longueur $(r_s - r_{s-1}) + \dots + (r_3 - r_2) + r_1 - \epsilon$ qui est strictement positive. Comme ϵ peut être choisi arbitrairement petit, nous pouvons répartir cette longueur en trois segments $l + \epsilon + l$ et identifier les deux paires de segments de longueur égale de façon à fermer la surface.

Dans le cas où s est pair, nous découpons le segment de longueur r_1 en deux segments de longueur ϵ et $r_1 - \epsilon$. Ensuite, nous coupons le segment de longueur r_2 en deux segments de longueur α et $r_2 - \alpha$. Nous procédons ainsi avec tous les cylindres de largeur r_2 à r_{s-1} de façon à obtenir une chaîne de $s - 2$ cylindres dont les deux segments de bord sont de longueur α et $(r_{s-1} - r_{s-2}) + \dots + (r_3 - r_2) + \alpha$. Enfin, nous découpons dans le dernier cylindre de largeur r_s quatre segments correspondant aux bords restants. La seule condition que nous devons vérifier est que $(r_{s-1} - r_{s-2}) + \dots + (r_3 - r_2) + r_1 < r_s$, de façon à ce qu'il puisse exister un segment de longueur α strictement positive. L'hypothèse selon laquelle les résidus ne sont pas tous égaux est suffisante. \square

Nous traitons maintenant les strates de genre 1 avec deux zéros.

Lemme 8.13. *L'application résiduelle $\mathfrak{R}_1^2(a_1, a_2; (-2^s))$ avec s pair et $(a_1, a_2) \neq (s - 1, s + 1)$ est surjective.*

Démonstration. Par éclatement de zéro, le lemme 8.12 implique qu'il suffit de prouver que $(1, \dots, 1)$ est dans l'image de l'application résiduelle de ces strates. Nous prouvons ce résultat par récurrence sur le nombre (pair) de pôles d'ordre -2 . L'hypothèse de récurrence est que dans chaque strate avec s pair et $(a_1, a_2) \neq (s - 1, s + 1)$ il existe une différentielle dont les résidus quadratiques sont $(1, \dots, 1)$ qui possède un lien-selle entre les deux zéros et un lien-selle fermé reliant le zéro d'ordre maximal à lui même. Ces liens-selles sont choisis non-horizontaux.

Pour $s = 2$, il y a les strates $\Omega^2 \mathcal{M}_1(5, -1; -2, -2)$ et $\Omega^2 \mathcal{M}_1(2, 2; -2, -2)$ à considérer. Des différentielles quadratiques dans ces strates avec résidus quadratiques $(1, 1)$ sont représentées dans la figure 27 en blanc. L'existence des liens-selles comme ci-dessus est claire.

Supposons par récurrence qu'il existe une différentielle de $\Omega^2 \mathcal{M}_1(a_1, a_2; (-2^s))$ avec résidus quadratiques $(1, \dots, 1)$ et $(a_1, a_2) \neq (s - 1, s + 1)$. Si $a_1 \geq a_2$, nous construisons des différentielles quadratiques dans les strates $\Omega^2 \mathcal{M}_1(a_1 + 2, a_2 + 2; (-2^{s+2}))$ et $\Omega^2 \mathcal{M}_1(a_1, a_2 + 4; (-2^{s+2}))$ satisfaisant à l'hypothèse de récurrence.

Pour ajouter 4 à l'ordre du zéro d'ordre maximal, nous coupons la différentielle le long du lien-selle fermé γ connectant ce zéro à lui même. Nous prenons un parallélogramme dont l'un des segments est donné par la période de γ et les autres arêtes sont les vecteurs 1. Puis nous collons des demi-cylindres infinis de circonférence 1 aux segments de longueur 1. Enfin nous collons les autres segments du parallélogramme aux bords de la surface. La différentielle obtenue à partir de la différentielle à gauche de la figure 27 est représentée à gauche de la figure 29. Pour ajouter 2 à l'ordre des deux zéros, il suffit de faire la même construction en coupant un lien-selle entre les deux zéros. Cette construction est représentée à droite de la figure 29.

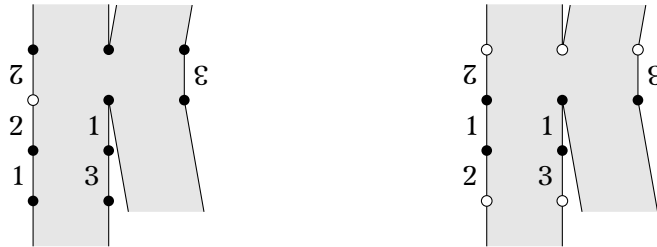


FIGURE 29. Différentielle dans la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_1(9, -1; (-2^4))$ à gauche et $\Omega^2 \mathcal{M}_1(4, 4; (-2^4))$ à droite dont les résidus sont $(1, 1, 1, 1)$

Pour conclure, il suffit de remarquer que toutes les strates $\Omega^2 \mathcal{M}_1(a_1, a_2; (-2^s))$ satisfaisant $(a_1, a_2) \neq (s - 1, s + 1)$ peuvent s'obtenir en ajoutant 2 à l'ordre des deux zéros ou 4 à l'ordre du zéro d'ordre maximal. \square

Nous traitons maintenant les strates générales sous la conditions que tous les pôles sont doubles.

Lemme 8.14. *L'application résiduelle de chaque composante de $\Omega^2 \mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n; (-2^s))$ distinctes des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_1(2s; (-2^s))$ et $\Omega^2 \mathcal{M}_1(s+1, s-1; (-2^s))$ avec s pair est surjective.*

Démonstration. Si $g = 1$, alors nous avons montré le résultat pour au plus deux zéros dans les lemmes précédent. Pour les strates avec $n \geq 3$ zéros, nous utilisons l'éclatement des zéros à partir des strates ayant deux zéros. Si $g \geq 2$, il suffit de montrer que l'image de l'application résiduelle des strates de la forme $\Omega^2 \mathcal{M}_2(2s+4; (-2^s))$ avec s pair contient $(1, \dots, 1)$. En effet, si c'est le cas l'éclatement des zéros et la couture d'anse impliqueront le résultat pour toutes les strates. Pour cela, prenons une différentielle quadratique de la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_1(2s+4; (-2^{s+2}))$ dont les résidus quadratiques sont $(1, \dots, 1, -1, -1)$ (cette différentielle existe en vertu du lemme 8.11). Nous formons une différentielle quadratique entrelacée en collant les deux pôles avec les résidus quadratiques -1 . D'après la proposition 2.4, cette différentielle entrelacée est lissable et la différentielle obtenue par lissage possède les propriétés souhaitées. De plus, en vertu de la proposition 6.3 de [CG21], toutes les composantes connexes peuvent être obtenue de cette façon. \square

Nous montrons enfin que les résidus proportionnels à $(1, \dots, 1)$ ne peuvent pas être obtenus dans deux familles de strates.

Lemme 8.15. *L'image de l'application résiduelle de $\Omega^2 \mathcal{M}_1(2s; (-2^s))$, avec s pair, est égale à $(\mathbb{C}^*)^s \setminus \mathbb{C}^* \cdot (1, \dots, 1)$.*

Rappelons que nous ne considérons que les différentielles quadratiques primitives. Sinon on pourrait simplement prendre le carré d'une différentielle abélienne dans $\Omega \mathcal{M}_1(s, (-1^s))$ qui a pour résidus $(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$.

Démonstration. D'après le lemme 8.12, il suffit de vérifier que la configuration de résidus quadratiques $(1, \dots, 1)$ n'est pas dans l'image de l'application résiduelle de ces strates.

L'image de $\mathfrak{R}_2^1(4; (-2^2))$ ne contient pas $(1, 1)$ car sinon on obtiendrait une différentielle quadratique entrelacée lissable en collant ses deux pôles (voir le lemme 2.4). La différentielle obtenue par lissage serait primitive dans la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_2(4)$, ce qui est absurde (voir [MS93]).

Supposons qu'il existe une différentielle ξ dans $\Omega^2 \mathcal{M}_1(2s; (-2^s))$ avec $s \geq 2$ dont tous les résidus quadratiques sont $(1, \dots, 1)$. Nous notons S la surface plate associée à ξ . Sans perte de généralité, on peut supposer que le cœur de S est dégénéré et contient $s+1$ liens-selles distincts (voir la section 2.4). En coupant S le long de ces liens-selles, nous obtenons l'union disjointe de s parties polaires quadratiques d'ordre 2 bordées par $2s+2$ segments.

Remarquons qu'aucun domaine polaire ne possède un bord formé d'un unique segment. Sinon pour que S ne soit pas singulière il faudrait que l'autre pôle bordé par ce lien-selle ait un résidu quadratique strictement supérieur à 1. Donc les graphes d'incidence de S (voir section 2.4) sont de l'une des deux formes suivantes.

- i) Il existe un sommet de valence 4 et les autres sont de valence 2.
- ii) Il existe deux sommets de valence 3 et les autres sont de valence 2.

Dans le graphe d'incidence de S , il y a des chaînes de sommets de valence 2. Pour tous ces domaines polaires, la somme des longueurs des liens-selles est égale à 1. Donc dans ces chaînes, la période des liens-selles est alternativement $\theta \in]0, 1[$ et $1 - \theta$. Nous pouvons enlever deux domaines polaires consécutifs de cette surface de la façon suivante. Nous coupons la surface S le long des deux liens-selles de période θ . Puis nous oublions les deux parties polaires et recollons les bords de la surface ainsi obtenue. La surface ainsi obtenue est encore primitive. Nous enlevons de S toutes les paires adjacentes avec deux liens-selles jusqu'à obtenir une surface dite *réduite*.

Il suffit maintenant de montrer qu'il n'existe pas de surfaces réduites. Considérons tout d'abord le cas où l'un des sommets du graphe d'incidence est de valence 4. Les seuls graphes d'incidence possibles comportent un sommet d'où part deux boucles qui contiennent 0 ou 1 sommet de valence 2. Comme s est pair, le seul graphe d'incidence possible correspond à une différentielle quadratique de $\Omega^2\mathcal{M}_1(4, (-2^2))$ avec résidus $(1, 1)$. Cela montre qu'aucune surface réduite ne possède ce graphe d'incidence.

Maintenant, nous considérons les surfaces réduites dont le graphe d'incidence possède deux sommets de valence 3. Dans ce cas deux types de graphes d'incidence sont possibles. L'un avec trois arêtes entre deux sommets et sur chaque arête 0 ou 1 sommet de valence 2. L'autre avec une arête entre deux sommets et une boucle à chaque sommet. La seule possibilité est que ces graphes aient 4 sommets, sinon le nombre de pôles serait impaire ou égal à 2. Donc il y a un sommet de valence 2 sur deux arêtes.

Considérons le premier graphe. Du fait de la présence des deux sommets de valence 2, les longueurs des liens-selles au bord des domaines polaires de valence 3 sont a, b, c et $a, 1 - b, 1 - c$ respectivement avec $a, b, c \in]0; 1[$. De plus, par hypothèse on a les égalités $a + b + c = 2 + a - b - c = 1$, ce qui implique que $a = 0$. Ce donne la contradiction.

Dans le second cas, il existe au moins une boucle qui contient un sommet. Comme la somme des longueurs des liens-selles au bord de ce domaine polaire est 1, le troisième lien-selle de ce domaine polaire est nul. Cela donne la dernière contradiction de cette preuve. \square

Lemme 8.16. *L'image de $\mathfrak{R}_1^2(s + 1, s - 1; (-2^s))$, avec s pair, est égale à $(\mathbb{C}^*)^s \setminus \mathbb{C}^* \cdot (1, \dots, 1)$.*

Démonstration. Nous commençons par remarquer que l'image de l'application résiduelle de la strate $\Omega^2\mathcal{M}_1(1, 3; -2, -2)$ ne contient pas $(1, 1)$. Sinon on pourrait former une différentielle entrelacée lissable en recollant les deux pôles doubles. La différentielle quadratique obtenue en la lissant serait dans $\Omega^2\mathcal{M}_2(1, 3)$, qui est vide par [MS93].

Nous traitons le cas $s \geq 4$ par l'absurde. Nous supposons qu'il existe une différentielle quadratique dans la strate $\Omega^2(s - 1, s + 1; (-2^s))$ avec pour résidus quadratiques $(1, \dots, 1)$. Dans un premier temps nous simplifions la différentielle quadratique puis nous montrons que les différentielles quadratiques simplifiées n'existent pas.

Nous supposons que le cœur de la différentielle est dégénéré et qu'il y a donc $s + 2$ liens-selles horizontaux (voir section 2.4). En coupant le long des liens-selles la surface nous obtenons s parties polaires quadratiques bordées par au moins 2 segments. Les domaines polaires dont le bord est composé par strictement plus de deux segments sont appelés *spéciaux*. Les valences des sommets correspondants dans le graphe d'incidence peuvent être de la forme (6) , $(5, 3)$, $(4, 4)$, $(4, 3, 3)$ ou $(3, 3, 3, 3)$.

Nous considérerons tout d'abord le graphe d'incidence simplifié défini dans la section 2.4. On utilisera le vocabulaire des graphes et des surfaces de manière interchangeable. Par exemple, la *valence* d'un pôle est la valence du sommet correspondant dans le graphe d'incidence. Les graphes d'incidence simplifiés possibles sont représentés dans la figure 30 (d'autres graphes à priori possibles seront écartés par des considérations générales).

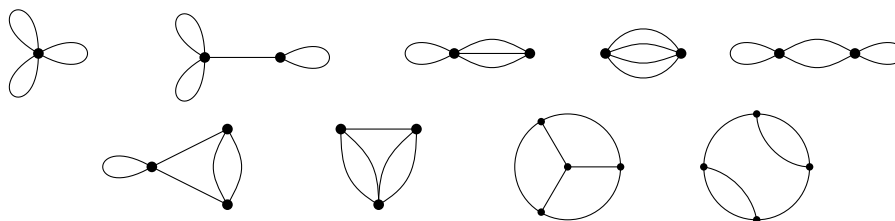


FIGURE 30. Tous les graphes d'incidence simplifiés des surfaces réduites

Une propriété des graphes d'incidence. Les graphes d'incidence que nous considérons ne peuvent pas contenir de boucle formée d'un nombre impair de sommets de valence 2. Sinon la somme des longueurs des liens-selles initial et final serait 1. Cela est impossible car au moins un autre lien-selle borde ce domaine polaire spécial.

Cela nous permet d'exclure la possibilité d'un unique pôle spécial de valence 6. En effet, le seul graphe d'incidence simplifié possible est la fleur à trois pétales (voir la figure 30). Mais comme le nombre de pôles de la différentielle est par hypothèse pair, il y a au moins un pétale qui contient un nombre impair de sommets de valence 2.

Simplification des graphes. Une première façon de simplifier la surface est d'enlever une paire de pôles voisins de valence 2. Cette opération est décrite dans la preuve du lemme 8.15. Remarquons qu'elle diminue l'ordre des deux zéros de 2 ou seulement l'un des deux de 4. Afin de rester dans une strate du type $\Omega^2 \mathcal{M}_1(s+1, s-1; (-2^s))$, nous autorisons cette opération si et seulement si les liens-selles connectent les deux zéros entre eux ou le zéro d'ordre maximal à lui-même. Remarquons qu'après avoir enlevé une paire avec des liens-selles connectant au zéro d'ordre maximal, celui-ci devient le zéro d'ordre minimal. Ainsi en jouant au ping-pong, on pourra enlever de nombreuses paires de pôles. En particulier, après avoir enlevé toutes les paires de sommets possibles, les paires restantes sont bordées par des liens-selles entre le zéro d'ordre minimal. À partir de maintenant, nous considérons uniquement des surfaces où il n'est pas possible d'enlever une paire de pôles.

Seconde propriété des graphes d'incidence. Nous montrons maintenant qu'il n'est pas possible d'avoir une boucle dans le graphe d'incidence simplifié à un sommet de valence 3. Comme nous l'avons remarqué, le nombre de sommets de valence deux sur cette boucle doit être pair. Si ce nombre est zéro, alors nous avons un zéro d'ordre -1 sur cette surface. Mais ce cas ne se présente dans aucune des strates considérées. Si le nombre de sommets sur cette boucle était strictement positif, alors le pôle de valence 3 serait bordé uniquement par les liens-selles entre le zéro d'ordre minimum et lui-même. Le lien-selle se situe entre ce domaine polaire et un domaine polaire distinct. Cela implique qu'au moins deux autres segments au bord d'un autre domaine polaire spécial possèdent ce zéro à une extrémité. Nous faisons maintenant une analyse au cas par cas.

Dans le cas $(5, 3)$ cela implique que la contribution angulaire des pôles spéciaux au zéro d'ordre inférieur est d'au moins 5π . Ainsi leurs contributions angulaires au zéro d'ordre maximal est d'au plus 3π . Comme l'extrémité de trois des cinq segments du bord du domaine de valence 5 contiennent le zéro d'ordre minimal, au plus une boucle au sommet de valence 5 peut être bordée par des liens-selles connectant le zéro maximal à lui-même. Comme il existe au maximum un pôle de valence deux sur cette boucle, l'ordre du zéro minimal est supérieur ou égal à celui du zéro d'ordre maximal. Cela donne la contradiction souhaitée. Dans les deux autres cas $(4, 3, 3)$ et $(3, 3, 3, 3)$ une analyse similaire aboutit à la même contradiction.

Troisième propriété des graphes d'incidence. Nous poursuivons en montrant qu'il existe au plus un pôle de valence 2 sur une arête du graphe simplifié. Supposons qu'il existe une arête avec plus de 2 sommets. Les liens-selles correspondants relient le zéro d'ordre minimal à lui-même. Soit cette arête connecte un pôle de valence 3 ou 4 à un autre sommet spécial. Soit c'est une boucle sur un sommet de valence 5 ou 4. On vérifie facilement que dans les deux cas cela entraîne que le zéro d'ordre minimal est l'extrémité de liens-selles de deux sommets du graphe d'incidence simplifié. Cela entraîne, de manière analogue au paragraphe précédent, que la contribution angulaire au zéro d'ordre minimal est plus grande que celle au zéro d'ordre maximal. On en déduit la même contradiction. À partir de maintenant, nous considérerons des graphes d'incidence avec 0 ou 1 sommet de valence 2 sur les arêtes du graphe simplifié.

Le cas $(5, 3)$. Considérons le cas où les pôles spéciaux sont de valences $(5, 3)$. Dans ce cas, deux graphes d'incidence simplifiés sont a priori possibles (voir la figure 30). Le premier

a une boucle à un pôle de valence 3 et est donc impossible. Le second graphe a trois arêtes entre les deux sommets spéciaux et une boucle au sommet de valence 5. Comme nous considérons des strates avec un nombre pair supérieur ou égal à 4 pôles, il y a 2 ou 4 sommets de valence 2 sur les arêtes. Si il y en avait 4, alors il y aurait un sommet sur la boucle, ce qui est impossible. Donc il y a forcément deux sommets sur les arêtes joignant les deux sommets spéciaux. Dénotons par $0 < a, b, c < 1$ les longueurs des liens-selles bordant le pôle de valence 3. Les longueurs des liens-selles au pôle de valence 5 seront donc $a, 1-b, 1-c$ et $2d$ avec $d > 0$. Comme par hypothèse $a + b + c = 1$ on a $a + 2 - b - c + 2d = 1 + 2a + 2d > 1$. Ce qui contredit le fait que le résidu quadratique à ce pôle est 1.

Le cas (4, 4). Dans le cas (4, 4), il y a deux graphes simplifiés possibles. Considérons tout d'abord le graphe avec 4 arêtes entre les deux sommets spéciaux. Il y a 2 ou 4 sommets de valence 2 sur ces arêtes. Les longueurs des liens-selles à un pôle spécial sont $0 < a, b, c, d < 1$ avec $a + b + c + d = 1$. À l'autre pôle spécial, il y a au moins deux longueurs de la forme $1 - a, 1 - b$. Donc le résidu à ce pôle est strictement supérieur à 1.

Le second graphe simplifié possède deux boucles et deux arêtes connectant les pôles spéciaux (voir la figure 30). La seule possibilité est qu'il y ai deux sommets non spéciaux sur les arêtes connectant les pôles spéciaux. On obtient comme précédemment une contradiction en considérant les longueurs des liens-selles.

Fusion de deux pôles. Nous définissons maintenant une nouvelle opération sur des pôles voisins appelée *fusion*. Prenons deux pôles d'ordres -2 connectés par au moins un lien-selle. Nous pouvons alors remplacer ces deux pôles par un pôle d'ordre 4, voir la figure 31. Remarquons que cette opération ne modifie ni l'ordre, ni le résidu des autres singularités. De plus, la différentielle ainsi modifiée reste primitive. Enfin, le résidu du pôle d'ordre -4 ainsi créé est nul.

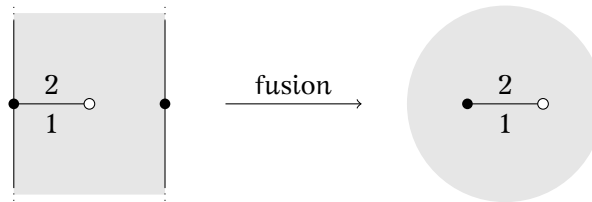


FIGURE 31. La fusion de deux pôles d'ordre -2 en un pôle d'ordre -4

Le cas (4, 3, 3). Maintenant, nous traitons le cas où les pôles spéciaux sont de valences (4, 3, 3). Il n'y a que deux graphes d'incidence simplifiés a priori possibles (voir la figure 30). Pour le graphe qui à une boucle au pôle de valence 4, il peut y avoir 1, 3 ou 5 pôles supplémentaires de valence 2. Ce dernier cas est impossible car il y aurait un sommet de valence 2 sur la boucle. Si on avait un sommet supplémentaire, alors on pourrait fusionner les pôles par paires afin d'obtenir une différentielle dans $\Omega^2 \mathcal{M}_1(5, 3; -4, -4)$ dont les résidus soient nuls. Nous avons montré qu'une telle différentielle n'existe pas dans le lemme 8.10. Donc la différentielle originale ne peut pas exister. Les cas avec trois pôles supplémentaires se traite de manière similaire par fusion des pôles.

Dans le cas du graphe d'incidence simplifié qui ne possède pas de boucle, nous pouvons avoir 1, 3 ou 5 pôles de valence 2 supplémentaires. Le cas avec 5 pôles est impossible à cause des longueurs des liens-selles. En effet, les longueurs des liens-selles entre le pôle de valence 4 et l'un des pôles de valence 3 sont a et b avec $a + b < 1$ à un pôle, et $1 - a$ et $1 - b$ avec $2 - a - b > 1$ à l'autre. Cela est clairement impossible. Enfin les cas avec 1 et 3 sommets de valence 2 peuvent se traiter avec la fusion en se ramenant au lemme 8.10.

Le cas (3, 3, 3, 3). Pour conclure, nous considérons le cas des graphes dont les sommets spéciaux sont de valence (3, 3, 3, 3). Les graphes possibles sont représentés dans la figure 30. Nous considérons tout d'abord le graphe complet K_4 . Pour 0, 2 or 4 pôles de valence deux

sur les arêtes, l'impossibilité peut se montrer en se ramenant au lemme 8.10 par fusion. S'il y a six pôles de valence 2, nous regardons les longueurs des liens-selles aux pôles spéciaux. Les longueurs de celles bordant le sommet central sont de longueur a , b et $1 - a - b$. Les longueurs des liens selles correspondants bordant les autres sommets spéciaux sont $1 - a$, $1 - b$ et $a + b$. Considérons le pôle avec le lien-selle de longueur $a + b$. Il a un autre lien de selle de longueur c . La longueur du lien selle correspondant sur l'autre pôle spécial (disons celui avec le lien selle de longueur $1 - a$) est $1 - c$. Le troisième lien-selle de ce pôle est de longueur $a + c - 1$. En continuant notre voyage autour du cercle, nous trouvons que la longueur des liens-selles du pôle d'où nous sommes parti sont $a + b$, c et $3 - a - b - c$ (c'est-à-dire $1 + 2a + 2c$). Comme la somme est 3 cela donne la contradiction souhaitée.

Enfin nous considérons le graphe en forme de balle de tennis. Comme précédemment, les cas où il y a 0, 2 ou 4 pôles de valence 2 supplémentaires peuvent être traités par fusion. Pour 6 pôles supplémentaires, une analyse de la longueur des liens-selles similaire au cas du graphe K_4 permet d'obtenir la dernière contradiction de cette preuve. \square

9. APPLICATIONS

Dans cette section finale, nous montrons comment nos résultats permettent d'obtenir facilement le fait que les strates sont (presque) toutes non vides. De plus, nous montrons que le nombre de cylindres disjoints sur une strate est bornée et que cette borne est atteinte.

9.1. Différentielles quadratiques d'aire finie. Dans ce paragraphe nous donnons une nouvelle preuve de la caractérisation de [MS93] des strates de différentielles quadratiques vides énoncée dans la proposition 1.10. Ce résultat dit que les strates primitives $\Omega^2 \mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n)$ en genre $g \geq 1$ sont vides si et seulement si $\mu = \emptyset$ ou $\mu = (-1, 1)$ en genre 1 ou $\mu = (4)$ et $\mu = (1, 3)$ en genre 2.

Toutes les différentielles quadratiques de type $\mu = \emptyset$ sont la puissance d'une différentielle abélienne de $\Omega \mathcal{M}_1(\emptyset)$. De plus, la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_1(-1, 1)$ est isomorphe à la strate de 1-formes ayant seulement un pôle et un zéro simples. Le théorème d'Abel implique que cette dernière est vide. Pour les deux strates vides de genre 2, il suffit de remarquer que le théorème de Riemann-Roch implique que les différentielles quadratiques sont sommes de carrés de différentielles abéliennes.

Nous montrons que les autres strates sont non vides. Soit $\Omega^2 \mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n)$ une strate de genre $g \geq 2$ avec $a_i > -2$. Si (a_1, \dots, a_n) est différent de $(4g - 4)$ et $(2g - 1, 2g - 3)$, alors, d'après le théorème 1.2, la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_1(a_1, \dots, a_n; ((-4)^{g-1}))$ contient une différentielle primitive (X_0, ω_0) dont tous les résidus quadratiques sont nuls. On obtient une différentielle quadratique entrelacée en attachant le carré d'une différentielle abélienne sur un tore à chaque pôle de X_0 . Cette différentielle entrelacée est lissable par le lemme 2.5. Les lissages sont clairement des différentielles quadratiques primitives. Donc ces strates sont non vides.

Enfin il reste le cas des strates $\Omega^2 \mathcal{M}_g(4g - 4)$ et $\Omega^2 \mathcal{M}_g(2g - 1, 2g - 3)$. En utilisant l'éclatement de zéros, il suffit de montrer que la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_g(4g - 4)$ est non vide pour tout $g \geq 3$. Nous savons que $\Omega^2 \mathcal{M}_2(4(g - 1); (-4^{g-2}))$ contient une différentielle primitive à résidus quadratiques nuls aux pôles (voir Théorème 1.1). On obtient une différentielle quadratique entrelacée en attachant à chaque pôle le carré d'une différentielle de $\Omega \mathcal{M}_1(\emptyset)$. Les différentielles quadratiques obtenues par lissage sont dans $\Omega^2 \mathcal{M}_g(4g - 4)$ comme souhaité.

9.2. Cylindres dans les différentielles quadratiques d'aire finie. Un *cylindre* dans une surface plate est une famille continue maximale de géodésiques fermées parallèles. Quand il est d'aire finie, son bord est formé de liens-selles. Soit $\Omega^2 \mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n)$ une strate de différentielles quadratiques (primitives) avec i zéros d'ordres impairs et p zéros d'ordres pairs. Nous allons montrer la proposition 1.11 qui assure que le nombre maximal de cylindres

disjoints dans une différentielle de cette strate est $g + p + \frac{i}{2} - 1$ et que cette borne est optimale.

Soit ξ une différentielle avec t cylindres disjoints. En faisant tendre la hauteur des cylindres vers l'infini, on obtient (après normalisation) une différentielle quadratique entrelacée dont tous les nœuds sont d'ordre -2 . Dans chaque composante irréductible, il y a au moins un zéro (ou un pôle simple) et la somme totale des ordres des singularités est paire. Puisque la dégénérescence n'ajoute que des pôles doubles, chaque composante irréductible contient un nombre pair de zéros d'ordre impair. Le nombre c de composantes irréductibles vaut au plus $p + \frac{i}{2}$. Le genre d'un graphe est la différence entre le nombre d'arêtes et le nombre de sommets moins un. Il est clair que le genre du graphe dual de la courbe stable vaut au plus g . Autrement dit $t - (c - 1) \leq g$ et donc $t \leq c + g - 1 \leq g + p + \frac{i}{2} - 1$.

Dans chacune des strates, nous allons construire une différentielle réalisant le nombre maximal de cylindres disjoints. Nous formerons une différentielle entrelacée dont le lissage par le lemme 2.4 donnera une différentielle avec les propriétés souhaitées. Dans chaque cas, les $p + \frac{i}{2}$ composantes irréductible contiendront soit un unique zéro d'ordre pair, soit une paire de singularités d'ordre impair. Selon le cas, on parlera de sommet abélien ou de sommet primitif. Rappelons que, dans un graphe, la valence d'un sommet est le nombre d'arêtes qui le contiennent. La valence d'un sommet abélien est au moins trois tandis que celle d'un sommet primitif ne vaut qu'un (lorsque les deux singularités de la composante sont des pôles simples).

Traisons d'abord le cas des strates de genre zéro. Pour chacun des p zéros pairs et $\frac{i}{2}$ paires de singularités impaires, d'ordre total a , on considère une strate de différentielles de genre zéro ayant ces singularités ainsi que $2 + \frac{a}{2}$ pôles doubles. Ces strates étant non vides, nous choisissons l'une de leurs différentielles. Nous traiterons ces différentielles de genre zéro comme les composantes irréductible de valence $2 + \frac{a}{2}$ de la différentielle entrelacée. Il est bien connu que toute distribution de valences sommant à $2s - 2$ est réalisable par un arbre à s sommets. Nous pouvons donc assembler les composantes irréductibles selon l'arbre, quitte à multiplier les différentielles de chaque composante par des constantes afin que les résidus aux pôles doubles s'accordent (ces renormalisations peuvent être librement réalisées car le graphe dual est un arbre). Nous obtenons ainsi la différentielle entrelacée qui, après lissage, donne une différentielle quadratique de la strate voulue réalisant une famille de $p + \frac{i}{2} - 1$ cylindres disjoints.

Le cas général se démontre par récurrence sur le genre. On supposera la borne réalisée dans toute strate primitive de genre au plus g . Considérons une strate $\Omega^2 \mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n)$ de genre $g + 1$. Si l'un de ces ordres a_i (sans perte de généralité) vérifie $a_i \geq 3$ et $a_i \neq 4$, alors la borne étant réalisée dans la strate $\Omega^2 \mathcal{M}_g(a_1 - 4, a_2, \dots, a_n)$ de genre g , on construit par couture d'anse notre différentielle avec un cylindre de plus. Les seules strates que l'on ne peut atteindre ainsi sont $\Omega^2 \mathcal{M}_2(-1, 5)$, $\Omega^2 \mathcal{M}_3(1, 7)$ et $\Omega^2 \mathcal{M}_3(8)$ car la proposition 1.10 assure que les strates $\Omega^2 \mathcal{M}_1(-1, 1)$, $\Omega^2 \mathcal{M}_2(1, 3)$ et $\Omega^2 \mathcal{M}_2(4)$ sont vides. Le point (ii) du théorème 1.2 de [GT21a] permet d'obtenir une différentielle abélienne dont le carré est dans $\Omega^2 \mathcal{M}_0(8, (-2^6))$ avec six résidus $(A, 1, 1, -A, -1, -1)$. En identifiant par paires les pôles dont les résidus sont respectivement $(A, -A)$, $(1, 1)$ et $(-1, -1)$, on obtient une différentielle primitive avec trois cylindres. Le théorème 1.9 permet de conclure de manière analogue pour les deux autres strates.

Il nous reste à traiter le cas où les ordres des singularités sont -1 , 1 , 2 ou 4 . Sur une géodésique d'un cylindre déjà existant, il est facile d'insérer un parallélogramme dont une paire de côtés opposés sera collée sur un nouveau cylindre. On ajoute ainsi un zéro d'ordre 4 et le nombre de cylindres disjoints augmente de 2. Cette chirurgie permet de traiter tous les cas ayant un zéro d'ordre 4 sauf $\Omega^2 \mathcal{M}_2(-1, 1, 4)$ et $\Omega^2 \mathcal{M}_3(4, 4)$. Dans le premier cas, il s'agit de construire une différentielle de $\Omega^2 \mathcal{M}_2(-1, 1, 4)$ ayant trois cylindres. Le point (ii)

du théorème 1.2 de [GT21a] donne l'existence d'une différentielle abélienne de résidus abéliens $(A, A, -A + \epsilon, -A - \epsilon)$ dont le carré est dans $\Omega^2\mathcal{M}_0(4, (-2^4))$. Ensuite, le théorème 1.9 permet de réaliser la configuration de résidus quadratiques $(A - \epsilon)^2, (A + \epsilon)^2$ dans la strate $\Omega^2\mathcal{M}_0(-1, 1; -2, -2)$. L'identification naturelle permet d'obtenir une différentielle primitive de $\Omega^2\mathcal{M}_2(-1, 1, 4)$ avec trois cylindres disjoints. Dans le second cas, il s'agit de construire une différentielle de $\Omega^2\mathcal{M}_3(4, 4)$ ayant quatre cylindres. Partant de deux différentielles de $\Omega^2\mathcal{M}_0(4; (-2^4))$ réalisant la configuration de résidus abéliens $(A, A, -A + \epsilon, -A - \epsilon)$, le bon choix de recollement fournit la différentielle adéquate.

Traisons enfin le cas où les ordres des singularités sont $-1, 1$ et 2 . Sur une partition (a_1, \dots, a_n) , nous procédons à deux opérations : remplacement d'un 2 par une paire $-1, -1$ et remplacement d'une paire $1, 1$ par une paire $-1, -1$. Après $g+1$ opérations de ce type, on obtient une partition de -4 . Pour la strate de genre zéro correspondante, nous réalisons un arbre avec les valences adéquates en prenant garde à maintenir ensemble les paires $-1, -1$ obtenues précédemment. On construit une différentielle entrelacée réalisant la borne. Pour chacune des $g+1$ composantes irréductibles contenant les paires de pôles simples artificiellement produites à partir d'un zéro double, nous remplaçons une différentielle de $\Omega^2\mathcal{M}_0(-1, -1; -2)$ réalisant un résidu quadratique A^2 par une différentielle de $\Omega^2\mathcal{M}_0(2; (-2^3))$ réalisant des résidus abéliens $(A, \frac{A}{2}, \frac{A}{2})$ (puis on identifiera les deux cylindres de circonférence A , augmentant donc le genre et le nombre de cylindres de un). Dans l'autre cas, nous utilisons une différentielle quadratique de $\Omega^2\mathcal{M}_0(1, 1; (-2^3))$ réalisant des résidus quadratiques (A^2, B^2, B^2) avec A et B deux réels non commensurables. Nous obtenons ainsi les différentielles réalisant la borne dans les cas restants.

RÉFÉRENCES

- [Bai+19] Matt BAINBRIDGE, Dawei CHEN, Quentin GENDRON, Samuel GRUSHEVSKY et Martin MÖLLER. *Strata of k -differentials*. *Algebr. Geom.* 6.2 (2019), p. 196-233.
- [CG21] Dawei CHEN et Quentin GENDRON. *Towards a classification of connected components of the strata of k -differentials*. 2021. arXiv : 2101.01650.
- [Dia00] Homero DIAZ-MARIN. *Meromorphic quadratic differentials with prescribed singularities*. *Bol. Soc. Bras. Mat., Nova Sér.* 31.2 (2000), p. 189-204.
- [GT21a] Quentin GENDRON et Guillaume TAHAR. *Différentielles abéliennes à singularités prescrites*. *Journal de l'École polytechnique — Mathématiques* 8 (2021), p. 1397-1428.
- [GT21b] Quentin GENDRON et Guillaume TAHAR. *Dihedral monodromy of cone spherical metrics*". En préparation. 2021.
- [GT22] Quentin GENDRON et Guillaume TAHAR. *k -différentielles à singularités prescrites*. En préparation. 2022.
- [Lan08] Erwan LANNEAU. *Connected components of the strata of the moduli spaces of quadratic differentials*. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* 41.1 (2008), p. 1-56.
- [MS93] Howard MASUR et John SMILLIE. *Quadratic differentials with prescribed singularities and pseudo-Anosov diffeomorphisms*. *Comment. Math. Helv.* 68.2 (1993), p. 289-307.
- [Nav08] Yoav NAVEH. *Tight upper bounds on the number of invariant components on translation surfaces*. *Isr. J. Math.* 165.1 (2008), p. 211-231.
- [Son+20] Jijian SONG, Yiran CHENG, Bo LI et Bin XU. *Drawing Cone Spherical Metrics via Strebel Differentials*. *Int. Math. Res. Not.* 2020.11 (2020), p. 3341-3363.
- [Str84] Kurt STREBEL. *Quadratic differentials*. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, Band 5*. Springer XII, 1984, p. xii + 184.
- [Tah18] Guillaume TAHAR. *Counting saddle connections in flat surfaces with poles of higher order*. *Geom. Dedicata* 196.1 (2018), p. 145-186.

(Quentin Gendron) CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS, GUANAJUATO, GTO., AP 402, CP 36000, MÉXICO
Email address: `quentin.gendron@cimat.mx`

(Guillaume Tahar) INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU - UMR CNRS 7586
Current address: Faculty of Mathematics and Computer Science, Weizmann Institute of Science, Rehovot,
7610001, Israel
Email address: `tahar.guillaume@weizmann.ac.il`