

k -DIFFÉRENTIELLES À SINGULARITÉS PRESCRITES

QUENTIN GENDRON AND GUILLAUME TAHAR

ABSTRACT. We study the local invariants that a meromorphic k -differential on a Riemann surface of genus $g \geq 0$ can have for $k \geq 3$. These local invariants are the orders of zeros and poles, and the k -residues at the poles. We show that for a given pattern of orders of zeros, there exists, up to a few exceptions, a primitive holomorphic k -differential having zeros of these orders (see Theorem 1.3). In the meromorphic case, in genus $g \geq 1$ every expected tuple appears as k -residues (see Theorem 1.2). On the other hand, some expected tuples are not the k -residues of a k -differential in some remaining strata. This happens in genus zero for a finite number (up to simultaneous scaling) of them as exposed in Section 1.3.

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|--|----|
| 1. Introduction | 1 |
| 2. Boîte à outils | 5 |
| 3. Au moins un pôle non divisible par k en genre zéro | 11 |
| 4. Les pôles sont divisibles par k et strictement supérieurs à k en genre zéro | 14 |
| 5. Les pôles sont divisibles par k en genre zéro | 20 |
| 6. Les pôles sont d'ordre k en genre zéro | 23 |
| 7. k -différentielles en genre supérieur ou égal à un | 37 |
| Références | 43 |

1. INTRODUCTION

Soient X une surface de Riemann de genre g et K_X son fibré en droites canonique. Les sections méromorphes de K_X sont les *différentielles abéliennes* de X et les sections du produit tensoriel $K_X^{\otimes k}$ sont les *k -différentielles* de X . Localement, une k -différentielle s'écrit $f(z)(dz)^k$, où f est une fonction méromorphe. Une k -différentielle quadratique est *primitive* si elle n'est pas la puissance d'une d -différentielle avec $d < k$.

Il est bien connu (voir par exemple [Sai10, Encadré III.2]) que les invariants en un point P d'une différentielle abélienne ω sont l'*ordre* de la différentielle en P et le *résidu* $\text{Res}_P(\omega)$ de celle-ci dans le cas où P est un pôle de ω . Ce résultat a été étendu au cas des k -différentielles dans [Bai+19]. Plus précisément, les invariants en P d'une k -différentielle ξ sont l'*ordre* de la différentielle en P et le *k -résidu* $\text{Res}_P^k(\xi)$, si P est un pôle de ξ d'ordre divisible par k .

Ces invariants ne peuvent pas être fixés arbitrairement mais vérifient certaines relations. Tout d'abord le k -résidu d'un pôle d'ordre $-k$ est toujours non nul alors que le k -résidu d'un pôle dont l'ordre n'est pas divisible par k est toujours nul. Ensuite, la somme des ordres des zéros et des pôles d'une k -différentielle est égale à $k(2g - 2)$. Enfin, dans le cas des différentielles abéliennes, la somme des résidus s'annule.

Comme on peut associer une surface plate à toute k -différentielle, les constructions géométriques de telles surfaces donnent des résultats d'existence pour certaines classes de k -différentielles (voir [Tro86]). Cependant, aucune construction systématique n'existe à ce jour pour répondre à la question suivante.

Date: 24 août 2022.

Key words and phrases. k -differential, Flat surface, Strata, Residue.

Étant donnés les ordres des zéros et pôles ainsi que les résidus aux pôles, existe-il une k -différentielle primitive ayant ces invariants locaux?

Le cas des différentielles abéliennes ($k = 1$) a été traité préalablement dans [GT21a] et celui des différentielles quadratiques ($k = 2$) dans [GT21b]. Dans cet article, nous donnons la caractérisation complète pour les k -différentielles avec $k \geq 3$.

Ce problème apparaît dans différents contextes. Par exemple, il est un ingrédient essentiel dans la résolution du problème de la réalisation de diviseurs tropicaux k -canoniques à partir de courbes définies sur un corps non-archimédien résolu dans [RS21]. Il apparaît aussi dans le problème de dégénérescence des k -différentielles comme étudié dans [Bai+19]. Cela peut servir à comprendre certains lieux de l'espace des modules, comme cela est fait par exemple dans [HS21].

1.1. Définitions. Afin de préciser la question centrale, nous introduisons un certain nombre de notions. Nous dénotons par

$$\mu := (a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p; -c_1, \dots, -c_r; \underbrace{-k, \dots, -k}_s),$$

une partition de $k(2g - 2)$ où les a_i sont supérieurs ou égaux à $-k + 1$, les $b_i := kl_i$ sont supérieurs ou égaux à $2k$ et divisibles par k , les c_i sont supérieurs ou égaux à k et non divisibles par k et qui contient s fois $-k$. La strate primitive $\Omega^k \mathcal{M}_g(\mu)$ paramètre les k -différentielles *primitive* de type μ . Les strates non vides de k -différentielles primitives sont des orbifolides de dimension $2g - 2 + n + p + r + s$.

Dans le cas des k -différentielles pour $k \geq 2$, rappelons tout d'abord la notion de k -résidu. Plus de détails sont donnés dans [Bai+19, Section 3]. Pour une k -différentielle ξ , au voisinage de chaque point P de X , il existe une coordonnée z telle que ξ est de la forme

$$\begin{cases} z^m (dz)^k & \text{si } m > -k \text{ ou } k \nmid m, \\ \left(\frac{r}{z}\right)^k (dz)^k & \text{si } m = -k, \\ \left(z^{m/k} + \frac{t}{z}\right)^k (dz)^k & \text{si } m < -k \text{ et } k \mid m, \end{cases} \quad (1.1)$$

où $t \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{C}^*$. Les nombres r et t sont définis à une racine de l'unité près. Le k -résidu $\text{Res}_P^k(\xi)$ de ξ en P est la puissance k -ième de r dans le second cas, la puissance k -ième de t dans le troisième cas et zéro sinon. Ainsi, le k -résidu est non nul dans le cas des pôles d'ordre $-k$ et peut ne pas être nul uniquement dans le cas des pôles d'ordre divisible par k . Notons qu'il n'existe pas de théorème des résidus pour les k -différentielles. Ainsi étant donnée une strate $\Omega^k \mathcal{M}_g(\mu)$, nous définissons l'espace k -résiduel de type μ par

$$\mathcal{R}_g^k(\mu) := \mathbb{C}^p \times (\mathbb{C}^*)^s. \quad (1.2)$$

Cet espace paramètre les configurations de k -résidus qu'une k -différentielle de $\Omega^k \mathcal{M}_g(\mu)$ peut a priori posséder.

L'application k -résiduelle est donnée par

$$\mathfrak{R}_g^k(\mu) : \Omega^k \mathcal{M}_g(\mu) \rightarrow \mathcal{R}_g^k(\mu) : (X, \xi) \mapsto (\text{Res}_{P_i}^k(\xi)), \quad (1.3)$$

où les P_i sont les pôles de ξ d'ordre divisible par k . Insistons sur le fait que par définition, les k -différentielles de $\Omega^k \mathcal{M}_g(\mu)$ sont *primitives*. Le but de cet article est de déterminer l'image de cette application pour chaque strate.

1.2. Genre supérieur ou égal à un. Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer les résultats centraux de cet article. Rappelons que $\Omega^k \mathcal{M}_g(\mu)$ paramètre les k -différentielles *primitive* de type μ .

Rappelons qu'en genre $g \geq 1$, les strates de k -différentielles ne sont en général pas connexes. En genre 1, les composantes connexes sont caractérisées par le nombre de rotation (voir [CG22] et la section 7.1). En particulier, une strate de nombre de rotation ρ est primitive si et seulement si ρ et k sont premiers entre eux. On a alors le résultat suivant.

Théorème 1.1. *Étant donné une composante connexe S d'une strate $\Omega\mathcal{M}_1(\mu)$ de différentielles abéliennes de genre 1. La restriction à S de l'application résiduelle de $\Omega\mathcal{M}_g(\mu)$ est surjective sauf dans le cas de la composante de nombre de rotation $\rho = 1$ de la strate $\Omega^3\mathcal{M}_1(6; -6)$ où l'image est \mathbf{C}^* .*

Nous considérons maintenant le cas des strates de genre supérieur ou égal à 2. Dans ce cas la classification des composantes connexes n'est pas connue. Toutefois, [CG22] décrit différents invariants qui permettent de décrire quelques composantes (éventuellement non connexes). Ces invariants sont l'hyperellipticité et la parité des composantes. On définit la composante paire (resp. impaire) comme l'union des composantes connexes paires (resp. impaires) d'une strate donnée. On a alors le résultat suivant.

Théorème 1.2. *Si $g \geq 2$ et μ contient un élément inférieur ou égal à $-k$, alors l'application résiduelle la restriction aux composantes paires et impaires de $\mathfrak{H}_g^k(\mu): \Omega^k\mathcal{M}_g(\mu) \rightarrow \mathcal{R}_g^k(\mu)$ est surjective. La restriction à la composante hyperelliptique est surjective si il n'y a qu'un pôle. Son image est la diagonale $(R, (-1)^k R)$ avec $R \in \mathbf{C}^*$ (resp. \mathbf{C}), si il y a deux pôles d'ordre $-k$ (resp. $-\ell k$ avec $\ell \geq 2$).*

Il est utile de noter que notre méthode permettrait d'obtenir la surjectivité de l'application résiduelle restreinte à chaque composante non hyperelliptique de genre $g \geq 2$ si celles-ci pouvaient être obtenues en cousant une anse et en éclatant des zéros d'une k -différentielle primitive.

Enfin, nous traitons le cas des strates de différentielles n'ayant que des singularités d'ordre strictement supérieur à $-k$. Ces différentielles correspondent à des surfaces plates d'aire finie.

Théorème 1.3. *Soit $\mu = (a_1, \dots, a_n)$ une partition de $k(2g-2)$ avec $k \geq 3$ telle que les a_i soient strictement supérieurs à $-k$. La strate $\Omega^k\mathcal{M}_g(\mu)$ paramétrant les différentielles primitives de profil μ est vide si et seulement si $g = 1$ et $\mu = (1, -1)$ ou $\mu = \emptyset$.*

Ce résultat précise [Tro86] qui ne se souciait pas de la primitivité des k -différentielles correspondant aux métriques plates obtenues.

1.3. k -différentielles en genre zéro. Nous énonçons maintenant les résultats en genre 0. Rappelons qu'étant donné une partition

$$\mu := (a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p; -c_1, \dots, -c_r; (-k^s))$$

de $-2k$, l'espace $\Omega^k\mathcal{M}_0(\mu)$ paramètre les k -différentielles primitives de type μ . On commence par remarquer (cf lemme 2.1) que ces strates sont non vides si et seulement si $\text{pgcd}(\mu, k) = 1$. Dans la suite, cette condition sera toujours implicitement satisfaite.

Dès lors qu'au moins trois des singularités ont un ordre qui n'est pas divisible par k , il n'y aucune obstruction à l'existence d'une configuration de résidus.

Théorème 1.4. *Soit $\Omega^k\mathcal{M}_0(\mu)$ une strate de genre zéro avec au moins trois singularités d'ordre non divisible par k . L'application résiduelle de $\Omega^k\mathcal{M}_0(\mu)$ est surjective.*

Quand il y a au plus deux singularités dont l'ordre n'est pas divisible par k , cela signifie en fait qu'il y en a exactement deux. Dans ce cas, il existe des obstructions non triviales. Un premier théorème décrit les obstructions lorsque les pôles ne sont pas tous d'ordre $-k$.

Théorème 1.5. *Soit $\Omega^k\mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p; -c_1, \dots, -c_r; (-k^s))$ une strate de genre zéro avec exactement deux singularités d'ordre non divisible par k et telle que $p + r \neq 0$. L'image de l'application résiduelle est*

- i) $\mathcal{R}_0^k(\mu) \setminus \{0\}$ si $s = 0$ et que la somme des ordres des zéros d'ordre divisible par k est strictement inférieure à kp ;
- ii) $\mathcal{R}_0^k(\mu)$ sinon.

Lorsque tous les pôles sont d'ordre $-k$, il n'existe qu'un nombre fini d'obstructions sporadiques. Le théorème suivant en donne la liste.

Théorème 1.6. *L'application résiduelle des strates $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; (-k^s))$ est surjective pour $k \geq 3$ sauf dans les cas suivants.*

- (1) L'image de $\mathcal{R}_0^k(-1, 1; -k, -k)$ est $(\mathbf{C}^*)^2 \setminus \mathbf{C}^* \cdot (1, (-1)^k)$.
- (2) L'image de $\mathcal{R}_0^3(-1, 4; (-3^3))$ est $(\mathbf{C}^*)^3 \setminus \mathbf{C}^* \cdot (1^3)$.
- (3) L'image de $\mathcal{R}_0^3(1, 2; (-3^3))$ est $(\mathbf{C}^*)^3 \setminus \mathbf{C}^* \cdot (1^3)$.
- (4) L'image de $\mathcal{R}_0^3(2, 4; (-3^4))$ est $(\mathbf{C}^*)^4 \setminus \mathbf{C}^* \cdot (1, 1, -1, -1)$.
- (5) L'image de $\mathcal{R}_0^3(2, 7; (-3^5))$ est $(\mathbf{C}^*)^5 \setminus \mathbf{C}^* \cdot (1^5) \cup \mathbf{C}^* \cdot ((1^4), -1)$.
- (6) L'image de $\mathcal{R}_0^3(2, 10; (-3^6))$ est $(\mathbf{C}^*)^6 \setminus \mathbf{C}^* \cdot ((1^3), (-1^3)) \cup \mathbf{C}^* \cdot (1^6)$.
- (7) L'image de $\mathcal{R}_0^3(5, 7; (-3^6))$ est $(\mathbf{C}^*)^6 \setminus \mathbf{C}^* \cdot (1^6)$.
- (8) L'image de $\mathcal{R}_0^4(-1, 5; (-4^3))$ est $(\mathbf{C}^*)^3 \setminus \mathbf{C}^* \cdot (1, 1, -4)$.
- (9) L'image de $\mathcal{R}_0^4(3, 5; (-4^4))$ est $(\mathbf{C}^*)^4 \setminus \mathbf{C}^* \cdot (1^4)$.
- (10) L'image de $\mathcal{R}_0^4(-1, 9; (-4^4))$ est $(\mathbf{C}^*)^4 \setminus \mathbf{C}^* \cdot (1^4)$.
- (11) L'image de $\mathcal{R}_0^4(3, 13; (-4^6))$ est $(\mathbf{C}^*)^6 \setminus \mathbf{C}^* \cdot (1^6)$.
- (12) L'image de $\mathcal{R}_0^6(-1, 7; (-6^3))$ est $(\mathbf{C}^*)^3 \setminus \mathbf{C}^* \cdot (1^3)$.

Il est intéressant de noter que mis à part les strates de la forme $\Omega^k \mathcal{M}_0(-1, 1; -k, -k)$, toutes les exceptions proviennent du fait que les racines k -ième de l'unité engendrent un réseau de \mathbf{C} si $k \in \{3, 4, 6\}$.

1.4. Organisation de l'article. Le schéma de la preuve de ces théorèmes est le suivant. Dans un premier temps nous utilisons la correspondance entre les k -différentielles méromorphes et certaines classes de surfaces plates introduites par [Bai+19] afin de construire explicitement des k -différentielles ayant les propriétés souhaitées lorsque le genre et le nombre de zéros sont petits.

Dans un second temps, nous déduisons le résultat général grâce à deux opérations : l'éclatement d'un zéro et la couture d'anse. La première de ces opérations permet d'augmenter le nombre de zéros sans changer le genre d'une k -différentielle. La seconde préserve le nombre de singularités mais augmente le genre de la surface sous-jacente.

Enfin, dans les cas où l'application résiduelle n'est pas surjective, nous développons des méthodes ad hoc afin de montrer la non-existence de k -différentielles possédant certains invariants.

L'article s'organise comme suit. Pour terminer cette introduction, nous posons quelques conventions. Dans la section 2 nous faisons les rappels nécessaires sur les représentations plates des k -différentielles méromorphes et sur les deux opérations précédemment citées. Nous y introduisons de plus les briques élémentaires qui nous permettent de construire les k -différentielles avec les propriétés souhaitées. La section 3 est dédiée au cas des k -différentielles de genre zéro avec au moins un pôle d'ordre non divisible par k . La section 4 est dédiée au cas des k -différentielles de genre zéro dont les pôles sont divisibles par k et distinctes de $-k$. La section 5 traite les k -différentielles en genre zéro avec des pôles d'ordre divisibles par k et égaux à $-k$. La section 6 traite les k -différentielles en genre zéro dont tous les pôles sont égaux à $-k$. La section 7 est dédiée aux cas des k -différentielles de genre supérieur ou égal à 1.

1.5. Conventions. Dans cet article le k -résidu sera $(2i\pi)^k$ fois le k -résidu défini par l'équation (1.1). Remarquons que cette convention n'a aucune incidence sur l'énoncé des résultats, mais rend les preuves plus agréables.

Pour une k -différentielle ξ , nous appelons *zéro* une singularité de ξ d'ordre strictement supérieur à $-k$ et *pôle* une singularité d'ordre inférieur ou égal à $-k$. Cette convention de langage est justifiée par le fait que grâce à elle les singularités coniques de la surface plate correspondent aux zéros de la k -différentielle. Le k -résidu d'une k -différentielle sera noté avec une lettre majuscule R tandis qu'une racine k -ième de R sera notée par une lettre minuscule r .

Si une strate paramètre des k -différentielles avec m singularités égales à a , alors nous noterons cela (a^m) . Par exemple $\Omega^3 \mathcal{M}_3(-1, 3, 3, 3, 3, 4; -3)$ pourra être notée $\Omega^3 \mathcal{M}_3(-1, (3^4), 4; -3)$. Plus généralement, si nous considérons une suite (a, \dots, a) de m nombres complexes tous identiques, nous noterons cette suite (a^m) . Nous espérons que ces notations seront claires dans le contexte.

1.6. Remerciements. Le premier auteur remercie l'*Institut für algebraische Geometrie* de la *Leibniz Universität Hannover* et le *Centro de Ciencias Matemáticas* de la *Universidad Nacional Autónoma de México* où il a élaboré une grande partie de ce texte. Le logiciel *GeoGebra* a procuré une aide substantielle au premier auteur. Le deuxième auteur est financé par l'Israel Science Foundation (grant No. 1167/17) et le European Research Council (ERC) dans le cadre du European Union Horizon 2020 research and innovation programme (grant agreement No. 802107). Enfin, nous remercions chaleureusement le rapporteur anonyme d'une version antérieure de ce texte pour sa relecture attentive et ses remarques précieuses.

2. BOÎTE À OUTILS

Dans cette section, nous introduisons les objets et les opérations de base pour nos constructions. Nous commençons par quelques rappels sur les k -différentielles dans la section 2.1. Ensuite nous introduisons dans la section 2.2 les briques élémentaires de nos surfaces plates. Nous poursuivons par un rappel sur les différentielles entrelacées et les opérations de scindage de zéro et de couture d'anse dans la section 2.3.

2.1. k -différentielles méromorphes et surfaces plates. Dans ce paragraphe, nous rappelons des résultats élémentaires sur les k -différentielles méromorphes et leur relation avec les surfaces plates. Plus de détails peuvent être trouvés dans [Bai+19].

Soit X une surface de Riemann de genre g et ξ une k -différentielle, ie une section méromorphe de la puissance tensorielle k -ième du fibré canonique K_X . On notera Z les zéros et P les pôles de ξ . L'intégration d'une racine k -ième de ξ sur $X \setminus P$ induit une structure plate sur $X \setminus \{Z, P\}$ donnée par un atlas dont les changements de cartes sont compositions de translations et rotations d'angles multiples de $\frac{2\pi}{k}$. Dans la complétion métrique, les pôles d'ordre $-k < a < 0$ et les zéros d'ordre $a \geq 0$ correspondent aux singularités coniques d'angle $(a + k)\frac{2\pi}{k}$. Cette similitude explique la convention de langage que les singularités d'ordre $a \geq -k + 1$ sont des *zéros* d'ordre a de ξ . Enfin, les pôles d'ordre $-k$ correspondent à des demi-cylindres infinis et les pôles d'ordre $-b < -k$ à un revêtement d'ordre $b - k$ d'un domaine angulaire d'angle $\frac{2\pi}{k}$.

Notons que le k -résidu Res^k d'une k -différentielle non primitive s'obtient facilement. En effet, soit ξ une k -différentielle puissance d -ième d'une (k/d) -différentielle η . Pour tout pôle P nous avons

$$\text{Res}_P^k(\xi) = \left(\text{Res}_P^{k/d}(\eta) \right)^d. \quad (2.1)$$

Nous énonçons un résultat élémentaire sur les k -différentielles en genre zéro.

Lemme 2.1. Soient $\mu = (m_1, \dots, m_t)$ un t -uplet tel que $\sum m_i = -2k$ et $d = \text{pgcd}(\mu, k)$. Toutes les k -différentielles de type μ sont la puissance d -ième d'une k/d -différentielle primitive de $\Omega^{k/d} \mathcal{M}_0(\mu/d)$.

Démonstration. Une k -différentielle ξ sur \mathbb{P}^1 de type μ est donnée par la formule

$$\xi = \prod_{i=1}^t (z - z_i)^{m_i} (dz)^k = \left(\prod_{i=1}^t (z - z_i)^{m_i/d} (dz)^{k/d} \right)^d.$$

C.Q.F.D.

Finalement rappelons que le cœur d'une k -différentielle est l'enveloppe convexe des singularités coniques pour la métrique définie par la différentielle. Le complémentaire du cœur d'une surface plate admet autant de composantes connexes que de pôles. On appelle *domaine polaire* la composante à laquelle un pôle appartient. Le bord d'un domaine polaire est toujours formé par un nombre fini de liens selles.

2.2. Briques élémentaires. Dans ce paragraphe, nous introduisons des surfaces plates à bord qui nous serviront de briques pour construire les k -différentielles ayant les propriétés locales souhaitées. Ces briques sont appelées *k-parties polaires*.

Étant donnés des vecteurs (v_1, \dots, v_t) dans $(\mathbf{C}^*)^t$, nous considérons la ligne brisée L dans \mathbf{C} donnée par la concaténation d'une demi-droite correspondant à \mathbf{R}_- , des v_i pour i croissant et d'une demi-droite correspondant à \mathbf{R}_+ . Nous supposons que les v_i sont tels que L ne possède pas de points d'auto-intersection. Nous donnerons une condition suffisante pour que cela soit possible dans le lemme 2.2.

Toutefois, il ne sera pas toujours possible de réaliser cette condition. Dans certains cas nous devons donc autoriser des demi-droites plus générales. Le reste de la construction s'adaptera facilement à ce cas. Les objets que nous obtiendrons par cette construction seront nommés *k-parties polaires généralisées*.

À partir du complémentaire $\mathbf{C} \setminus L$ de la ligne brisée L , nous définissons :

- le *domaine basique positif* $D^+(v_1, \dots, v_t)$ qui est l'adhérence de la composante connexe de $\mathbf{C} \setminus L$ contenant les nombres complexes au dessus de L ;
- *domaine basique négatif* $D^-(v_1, \dots, v_t)$ qui est l'adhérence de l'autre composante connexe de $\mathbf{C} \setminus L$.

Étant donné un domaine positif $D^+(v_1, \dots, v_t)$ et un négatif $D^-(w_1, \dots, w_r)$, on construit le *domaine basique ouvert à gauche* $D_g(v_1, \dots, v_t; w_1, \dots, w_r)$ en collant par translation les deux demi-droites correspondant à \mathbf{R}_+ .

Si on recolle plutôt les deux demi-droites correspondant à \mathbf{R}_- , nous obtenons le *domaine basique ouvert à droite* $D_d(v_1, \dots, v_t; w_1, \dots, w_r)$.

On se donne $b := k\ell$ avec $\ell \geq 2$ et $\tau \in \{1, \dots, \ell - 1\}$. Soient $(v_1, \dots, v_t; w_1, \dots, w_r)$ des vecteurs de \mathbf{C}^* tels que la partie réelle de leurs sommes est positive et que l'argument (pris dans $]-\pi, \pi]$) des v_i est décroissant, des w_j est croissant. La partie polaire d'ordre b et de type τ associée à $(v_1, \dots, v_t; w_1, \dots, w_r)$ est la surface plate à bord obtenue de la façon suivante. Nous partons de l'union disjointe de :

- (i) $\tau - 1$ domaines basiques ouverts à gauche associé à la suite vide ;
- (ii) $\ell - \tau - 1$ domaines basiques ouverts à droite associé à la suite vide ;
- (iii) le domaine positif associé aux v_i ;
- (iv) le domaine négatif associé aux w_j .

On colle alors par translation la demi-droite inférieure du i -ième domaine polaire ouvert à gauche à la demi-droite supérieure du $(i + 1)$ -ième. La demi-droite inférieure du domaine $\tau - 1$ est identifiée à la demi-droite de gauche du domaine positif. La demi-droite de gauche du domaine négatif est identifiée à la positive du premier domaine ouvert à gauche. On procède de même à droite. La figure 1 illustre cette construction.

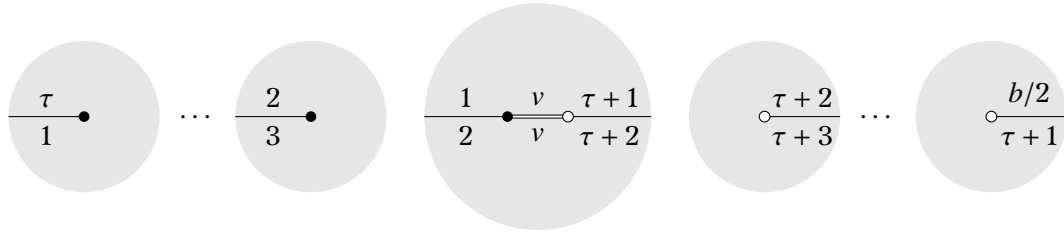


FIGURE 1. Une partie polaire d'ordre b de type τ associée à $(v; v)$. Les demi-droites dont les labels coincident sont identifiés par translation

Si $\sum v_i = \sum w_j$ nous dirons que cette partie polaire est *triviale*. Dans le cas contraire, nous dirons que la partie polaire est *non triviale*. Sur la figure 2, le dessin de gauche illustre une partie polaire non triviale.

On se donne maintenant des vecteurs (v_1, \dots, v_t) avec $t \geq 1$ tels que la concaténation V de ces vecteurs dans cet ordre n'a pas de points d'auto-intersection. De plus, on suppose qu'il existe deux demi-droites parallèles L_D et L_F de vecteur directeur \vec{w} , issues respectivement du point de départ D et final F de V , ne rencontrant pas V et telles que (\vec{DF}, \vec{w}) est une base positive de \mathbf{R}^2 . On définit la partie polaire $C(v_1, \dots, v_t)$ d'ordre k associé aux v_i comme le quotient du sous-ensemble de \mathbf{C} entre V et les demi-droites L_D et L_F par l'identification de L_D à L_F par translation. Le résidu du pôle simple correspondant est donné par la somme $F - D$ des v_i . Une partie polaire d'ordre k est donnée à droite de la figure 2.

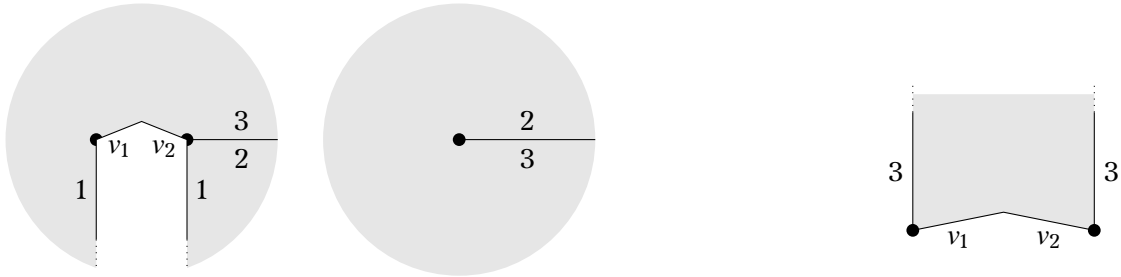


FIGURE 2. Une partie polaire non triviale associée à $(v_1, v_2; \emptyset)$ d'ordre $3k$ (de type 1) à gauche et d'ordre k à droite

Nous traitons maintenant le cas des pôles d'ordre non divisible par k . Soient $c = \ell k + s$ avec $0 < s < k$ et $\ell \geq 1$. On se donne des vecteurs v_i de \mathbf{C}^* de partie réelle positive. La k -partie polaire d'ordre c associée aux $(v_1, \dots, v_t; \emptyset)$ est donnée par la construction suivante. Nous concaténons les v_i dans le plan et traçons deux demi-droites L_1 et L_2 issues respectivement des points finaux et initiaux de la concaténation telles que l'angle entre L_1 et L_2 est $-s\frac{2\pi}{k}$. Comme dans le cas des parties polaires d'ordre b , la ligne brisée ainsi formée doit être sans points d'intersection. Nous donnerons une condition suffisante pour que cela soit possible dans le lemme 2.2. Nous considérons la surface au dessus de cette courbe brisée. Ensuite nous prenons $\ell - 1$ domaines basiques ouvert dans la direction de L_1 associés à la suite vide. Puis nous identifions les demi-droites cycliquement par translation, à l'exception du dernier qui est identifié par translation et rotation d'angle $-s\frac{2\pi}{k}$ à la demi droite L_2 . Cette construction est illustrée à gauche de la figure 3.

Pour simplifier certaines constructions, il est utile de considérer la k -partie polaire d'ordre c associée à $(\emptyset; v_1, \dots, v_t)$. Elle est définie de manière similaire à la partie polaire précédente en considérant la surface sous la courbe brisée suivante. Nous concaténons les v_i dans le plan et traçons deux demi-droites L_1 et L_2 issues respectivement des points finaux et initiaux

de la concaténation telles que l'angle entre L_1 et L_2 est $s\frac{2\pi}{k}$. La fin de cette construction est similaire à la précédente.

Nous donnons maintenant une condition suffisante pour que la ligne brisée décrite aux paragraphes précédents soit sans points d'intersection.

Lemme 2.2. *Dans la construction des k -parties polaires d'ordre c , si les v_i sont soit de partie réelle strictement positive, soit de partie réelle nulle et de partie imaginaire strictement positive, alors, quitte à permuter l'ordre des v_i , il existe des demi-droites L_1 et L_2 telles que la ligne brisée formée des v_i et des L_j soit sans point d'intersection.*

Démonstration. Quitte à permuter les v_i , on peut supposer que les arguments des vecteurs v_i , appartenant à l'ensemble $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ sont décroissants. Notons que pour tout $\theta \in]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[$ la demi-droite de pente θ partant du point initial de la concaténation n'a pas d'autres points d'intersection avec celle-ci. On a le même résultat pour les demi-droites d'angle ϕ partant du point final pour tout $\phi \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Cela implique que l'on peut trouver des droites L_1 et L_2 sans point d'intersection avec le reste de la construction qui forment n'importe quel angle strictement compris entre 0 et 2π . C.Q.F.D.

Nous aurons besoin dans un cas d'une construction un peu plus générale que dans le cas précédent. On note comme précédemment $c = k\ell + s$ avec $-k < s < 0$. Étant donné $(v_1, v_2) \in \mathbf{C}^*$ la partie polaire d'ordre c associée à $(\emptyset; v_1, v_2)$ de type t avec $1 \leq t \leq \ell$ est donnée par la construction suivante. Nous concaténons v_1 avec v_2 dans le plan et traçons deux demi-droites L_1 et L_2 issues respectivement des points finaux et initiaux de la concaténation telles que l'angle entre L_1 et L_2 est $s\frac{2\pi}{k}$. Nous considérons la surface au dessus de cette courbe brisée. Ensuite nous prenons $t - 1$ domaines basiques ouvert à droite associés à la suite vide. Puis nous identifions les demi-droites cycliquement par translation, à l'exception du dernier qui est identifié par translation et rotation d'angle $-s\frac{2\pi}{k}$ à la demi droite L_2 . Puis nous coupons la surface en partant du point d'intersection entre v_1 et v_2 le long d'une demi-droite L_3 . Puis nous collons $\ell - t$ domaines basiques de manière cyclique à cette demi-droite. Cette construction est illustrée à droite de la figure 3.



FIGURE 3. La 3-partie polaire associée à $(v_1; \emptyset)$ d'ordre 7 à gauche et la 6-partie polaire associée à $(\emptyset; v_2, v_3)$ d'ordre 13 et de type 1 à droite.

Nous résumons maintenant les propriétés des constructions du paragraphe précédent.

Lemme 2.3. *Soient $(v_i; w_j)$ des nombres complexes, le pôle obtenu à partir de la k -partie polaire d'ordre $b = k\ell$ et de type τ associée à $(v_i; w_j)$ est d'ordre $-b$ et possède un k -résidu égal à $(\sum v_i - \sum w_j)^k$.*

Soit (v_1, \dots, v_l) avec $l \geq 1$, le pôle associé au domaine basique d'ordre k associé à v_i est d'ordre $-k$ et possède un k -résidu égal à $(\sum v_i)^k$.

2.3. k -différentielles entrelacées, éclatement de zéros et couture d'anses. Dans ce paragraphe, nous rappelons certains cas particuliers des résultats obtenus dans [Bai+19] au sujet des différentielles entrelacées. Cela nous permet de rappeler les constructions de l'éclatement des zéros et de la couture d'anse.

Tout d'abord, nous rappelons la définition d'une différentielle entrelacée. Étant donnée une partition $\mu := (m_1, \dots, m_l)$ telle que $\sum_{i=1}^l m_i = k(2g - 2)$, une k -différentielle entrelacée η

de type μ sur une courbe stable n -marquée (X, z_1, \dots, z_t) est une collection de k -différentielles non nulles η_v sur les composantes irréductibles X_v de X satisfaisant aux conditions suivantes.

(0) (**Annulation comme prescrit**) Chaque k -différentielle η_v est méromorphe et le support de son diviseur est inclus dans l'ensemble des nœuds et des points marqués de X_v . De plus, si un point marqué z_i se trouve sur X_v , alors $\text{ord}_{z_i} \eta_v = m_i$.

(1) (**Ordres assortis**) Pour chaque nœud de X qui identifie $q_1 \in X_{v_1}$ à $q_2 \in X_{v_2}$,

$$\text{ord}_{q_1} \eta_{v_1} + \text{ord}_{q_2} \eta_{v_2} = -2k.$$

(2) (**Résidus assortis aux pôles d'ordre $-k$**) Si a a un nœud de X qui identifie $q_1 \in X_{v_1}$ avec $q_2 \in X_{v_2}$ on a $\text{ord}_{q_1} \eta_{v_1} = \text{ord}_{q_2} \eta_{v_2} = -k$, alors

$$\text{Res}_{q_1}^k \eta_{v_1} = (-1)^k \text{Res}_{q_2}^k \eta_{v_2}.$$

Ce n'est que pour des cas très particuliers que nous aurons besoin de savoir quand une k -différentielle entrelacée est lissable. Nous rappelons ici uniquement les cas qui nous intéressent. Le premier cas est celui où l'ordre des k -différentielles à tous les nœuds est égal à $-k$.

Lemme 2.4. *Soit $\eta = \{\eta_v\}$ une k -différentielle entrelacée. Si l'ordre des k -différentielles η_v aux nœuds est $-k$, alors η est lissable localement.*

Notons que dans ce cas, la notion de différentielle entrelacée correspond à la notion classique de différentielle stable.

Maintenant nous regardons le cas des k -différentielles entrelacées à deux composantes.

Lemme 2.5. *Supposons que X possède exactement deux composantes X_1 et X_2 reliées par un unique nœud qui identifie $q_1 \in X_1$ à $q_2 \in X_2$. Si $\text{ord}_{q_1} \eta_1 > -k > \text{ord}_{q_2} \eta_2$, alors la k -différentielle entrelacée est lissable si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée.*

i) $\text{Res}_{q_2}^k \eta_2 = 0$

ii) η_1 n'est pas la puissance k -ième d'une 1-forme holomorphe.

De plus, le lissage peut se faire sans modifier les k -résidus de η_1 si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée.

i) $\text{Res}_{q_2}^k \eta_2 = 0$

ii) η_1 n'est pas la puissance k -ième d'une différentielle abélienne méromorphe.

Remarquons que la deuxième partie du lemme n'est pas explicitement prouvée dans [Bai+19]. Toutefois, cela peut se montrer sans problèmes en combinant la preuve du théorème 1.5 et le lemme 4.4 de [Bai+19].

Maintenant, nous donnons deux applications cruciales du lemme 2.5.

Proposition 2.6 (Éclatement d'un zéro). *Soient (X, ξ) une k -différentielle de type μ et $z_0 \in X$ un zéro d'ordre $a_0 > -k$ de ξ . Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_t)$ un t -uplet d'entiers strictement supérieurs à $-k$ tel que $\sum_i \alpha_i = a_0$.*

Il existe une opération sur (X, ξ) en z_0 qui fournit une k -différentielle (X', ξ') de type $(\alpha_0, \dots, \alpha_t, \mu \setminus \{a_0\})$ qui ne modifie pas les k -résidus de ξ si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée.

i) ξ n'est pas la puissance k -ième d'une différentielle abélienne méromorphe.

ii) Il existe une k -différentielle de genre zéro et de type $(\alpha_1, \dots, \alpha_t; -a_0 - 2k)$ dont le k -résidu au pôle d'ordre $-a_0 - 2k$ est nul.

De plus, si $\xi = \omega^k$ avec ω une différentielle abélienne méromorphe, alors la k -différentielle ξ' est primitive si et seulement si $\text{pgcd}(\alpha_i, d) = 1$.

Démonstration. Partons de (X, ξ) . On forme une différentielle entrelacée en attachant au point z_0 une droite projective avec une différentielle ayant les ordres souhaités. Le lemme 2.5 implique facilement la proposition 2.6. C.Q.F.D.

La seconde construction nous permettra en particulier de faire une récurrence sur le genre des surfaces de Riemann.

Proposition 2.7 (Couture d'anse). *Soient (X, ξ) une k -différentielle (primitive) dans la strate $\Omega^k \mathcal{M}_g(\mu)$ et $z_0 \in X$ un zéro d'ordre a_0 de ξ . Il existe une opération locale à z_0 qui produit une k -différentielle (X', ξ') dans la strate $\Omega^k \mathcal{M}_{g+1}(a_0 + 2k, \mu \setminus \{a_0\})$.*

Démonstration. Partons de (X, ξ) . On forme une différentielle entrelacée en attachant au point z_0 une courbe elliptique avec une différentielle de type $(a_0 + 2k; -a_0 - 2k)$. Le lemme 2.5 permet de conclure. C.Q.F.D.

Il est à noter que dans le cas des différentielles quadratiques, l'éclatement d'un zéro peut ne pas être réalisable de manière locale (voir [MZ08]). Nous pouvons caractériser tous les cas où l'éclatement d'une singularité conique n'est pas possible localement.

Proposition 2.8. *Soient ξ une k -différentielle avec $k \geq 1$ et z_0 une singularité d'ordre $a_0 > -k$ de ξ . Le scindage de z_0 en t singularités d'ordres $(\alpha_1, \dots, \alpha_t)$ avec $a_0 = \sum \alpha_i$ et $\alpha_i > -k$ n'est pas local précisément lorsque $k \geq 2$, $t = 2$, $k \mid a_0$ et $k \nmid \text{pgcd}(\alpha_i)$.*

Démonstration. L'éclatement d'un zéro d'ordre $a > -k$ d'une k -différentielle ξ en n zéros d'ordres (a_1, \dots, a_n) correspond au lissage d'une k -différentielle entrelacée. Cette k -différentielle entrelacée est constituée d'une k -différentielle ξ_0 sur \mathbb{P}^1 avec des zéros d'ordres (a_1, \dots, a_n) et un pôle d'ordre $-a - 2k$ attachée au zéro d'ordre a de ξ (voir la proposition 2.6). Cette k -différentielle entrelacée est lissable localement si et seulement tous les k -résidus de ξ_0 sont nuls. L'éclatement est possible localement si et seulement s'il existe une k -différentielle de genre zéro de type $(a_1, \dots, a_n; -2k - a)$ dont tous les k -résidus sont nuls. La proposition 2.8 est alors une conséquence directe des théorèmes 1.4 et 1.5, ainsi que de l'équation (2.1) dans le cas $k \geq 3$. Le cas $k = 1$ se déduit du théorème des résidus et le cas $k = 2$ des théorèmes 1.3 et 1.7 de [GT21b]. C.Q.F.D.

Nous terminons cette section par un résultat qui sera utile pour éclater les zéros d'une k -différentielle en genre zéro.

Lemme 2.9. *Pour $k \geq 3$ et $n \geq 2$, on considère une famille de n entiers (a_1, \dots, a_n) avec $a_i > -k$ telle que :*

- i) $\text{pgcd}(a_1, \dots, a_n) = 1$;
- ii) $\sum a_i = kL$ où $L \geq -1$.

Pour tout d tel que $2 \leq d \leq n$, on peut alors partitionner les (a_1, \dots, a_n) en d sous-ensembles E_1, \dots, E_d non vides de sommes A_1, \dots, A_d tels que :

- i) $A_1, \dots, A_d > -k$;
- ii) $\text{pgcd}(A_1, \dots, A_d) \notin \{\frac{k}{2}, k\}$.

On appelle admissible une telle partition.

Démonstration. Il est suffisant de démontrer la propriété pour $d = 2$. En effet, supposons une partition admissible en d sous-ensembles. Si $d < n$, alors l'un des sous-ensembles (disons E_1) n'est pas un singleton. Considérons l'élément le plus petit de E_1 (disons a_1). Si l'on découpe E_1 entre un singleton contenant a_1 et un sous-ensemble les autres éléments, nous obtenons une nouvelle partition de (a_1, \dots, a_n) qui sera également admissible. Ainsi, si la propriété est valide pour $d = 2$, elle le sera pour chaque d entre 2 et n .

Dans ce qui suit, nous démontrons la propriété pour $d = 2$. Tout d'abord, nous traitons le cas où il existe un élément $a_i < 0$ tel que $a_i \neq -\frac{k}{2}$. Posons $\{a_i\}$ comme premier sous-ensemble. Nous avons donc $A_1 = a_i$ et $A_2 = kL - a_i$. Il apparaît que $A_1, A_2 \notin \frac{k}{2}\mathbb{Z}$ et $A_1, A_2 > -k$.

Nous supposons donc à partir de maintenant que les a_j appartiennent à $\{-\frac{k}{2}\} \cup \mathbb{N}^*$. Supposons que $a_j \geq 0$ pour tout j . Comme le pgcd des a_j est 1, il existe au moins un élément $a_i \notin \frac{k}{2}\mathbb{Z}$. Il suffit de choisir comme premier sous-ensemble $\{a_i\}$ et comme second sous-ensemble les $n - 1$ autres éléments pour obtenir la propriété.

Supposons finalement qu'il existe un élément $a_i > 0$ non divisible par $\frac{k}{2}$ et un élément $a_j = -\frac{k}{2}$. Notons que $a_i + a_j \notin \frac{k}{2}\mathbb{Z}$ et $a_i + a_j > -k$. Il suffit donc de répéter cette opération jusqu'à se ramener à l'un des cas précédent. C.Q.F.D.

Le lemme 2.9 montre que l'on peut toujours obtenir une k -différentielle avec $n \geq 3$ zéros d'ordres prescrits en éclatant un zéro d'une k -différentielle avec 2 zéros. La k -différentielle éclatée n'est pas toujours primitive, mais le lemme assure qu'elle n'est pas la puissance d'une 1-forme ou d'une différentielle quadratique. Par exemple, les 30-différentielles de la strate $\Omega^{30}\mathcal{M}_0(-3, -5, -22; -30)$ ne peuvent jamais s'obtenir à partir de 30-différentielles primitives car les trois strates $\Omega^{30}\mathcal{M}_0(-3, -27; -30)$, $\Omega^{30}\mathcal{M}_0(-5, -25; -30)$ et $\Omega^{30}\mathcal{M}_0(-8, -22; -30)$ ne sont pas primitives.

3. AU MOINS UN PÔLE NON DIVISIBLE PAR k EN GENRE ZÉRO

Rappelons que la strate $\Omega^k\mathcal{M}_0(\mu)$ paramètre les k -différentielles primitives de type μ . Dans cette section, les strates contiennent des pôles d'ordres non divisibles par k . Nous commençons par montrer qu'il existe des strates dont l'image de l'application résiduelle de contient pas l'origine. Puis nous montrons que tous les autres résidus sont obtenus dans l'image de l'application résiduelle.

3.1. Obstruction. Nous montrons que l'image de l'application k -résiduelle peut ne pas contenir l'origine.

Lemme 3.1. *L'image de l'application k -résiduelle de $\Omega^k\mathcal{M}_0(a_1, kl_2, \dots, kl_n; -b_1, \dots, -b_p; -c)$ avec $\sum_{i=1}^n l_i < p$ ne contient pas l'origine.*

Démonstration. Étant donné une k -différentielle de la strate $\Omega^k\mathcal{M}_0(\mu)$ dont tous les k -résidus sont nuls, le revêtement canonique définit une différentielle méromorphe $(\widehat{X}, \widehat{\omega})$. Par les résultats de la section 2.1 de [Bai+19], le revêtement est uniquement ramifié au zéro d'ordre a_1 et au pôle d'ordre $-c$. Donc la surface \widehat{X} est une sphère de Riemann. De plus la différentielle $\widehat{\omega}$ possède k zéros d'ordres l_i pour $i \geq 2$, un zéro d'ordre $a_1 + k - 1$, de plus k pôles d'ordres $-b_j/k$ pour tout $j \geq 1$ et un pôle d'ordre $-c + k - 1$. Notons de plus que le résidu de chaque pôle est nul. D'après le point i) du théorème 1.2 de [GT21a], cela est possible si et seulement si l'ordre de tous les zéros est inférieur ou égal à

$$(c + 1 - k) + k \sum_{j=1}^p \frac{b_j}{k} - (kp + 2).$$

Cette condition implique que

$$a_1 \leq c + \sum b_i - 2k - kp.$$

Le fait que la différence entre la somme des ordres des zéros et la somme des ordres des pôles est égale à $-2k$ implique le résultat. C.Q.F.D.

3.2. Constructions. Dans cette section, nous allons montrer qu'à l'exception des obstructions de la section précédente, tous les résidus peuvent être obtenus.

Nous commençons par les strates ayant un unique zéro.

Lemme 3.2. *Soit $\Omega^k\mathcal{M}_0(a; -b_1, \dots, -b_p; -c_1, \dots, -c_r; (-k^s))$ une strate de genre zéro telle que $r \neq 0$. L'image de l'application résiduelle est*

- i) $\mathcal{R}_0^k(\mu)$ si $r \geq 2$ ou $s \geq 1$,
- ii) $\mathcal{R}_0^k(\mu) \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ si $r = 1$ et $s = 0$.

Démonstration. Nous commençons par donner la construction d'une k -différentielle dans la strate $\Omega^k\mathcal{M}_0(\mu)$ avec $\mu = (a; -b_1, \dots, -b_p; -c_1, \dots, -c_r; (-k^s))$ dont les k -résidus sont donnés par (R_1, \dots, R_{p+s}) dans $\mathcal{R}_0^k(\mu) \setminus \{(0, \dots, 0)\}$.

Pour les pôles P_{p+i} d'ordres $-k$, nous prenons une k -partie polaire d'ordre k associée à une racine k -ième r_{p+i} de R_{p+i} . Pour chaque pôle P_i d'ordre $-b_i = -k\ell_i$ tel que $R_i \neq 0$, nous prenons une k -partie polaire non triviale d'ordre b_i associée à $(r_i; \emptyset)$. Nous choisissons une racine r_i avec une partie réelle positive. Pour les pôles d'ordre $-b_i$ tels que $r_i = 0$ nous prenons une k -partie polaire triviale d'ordre b_i associée à $(r_{j_i}; r_{j_i})$ où r_{j_i} est l'une des racines choisie précédemment.

Maintenant, pour tous les pôles d'ordre $-c_i$ sauf un, disons P_1 d'ordre $-c_1$, nous prenons une k -partie polaire de type c_i associée à $(1; \emptyset)$. Pour le dernier pôle P_1 d'ordre $-c_1$, nous prenons la k -partie polaire de type c_1 , sans points d'intersection (voir le lemme 2.2), associée à $(\emptyset; (1^{r-1}, r_1, \dots, r_l))$ où l est le nombre de résidus non nuls.

La surface est obtenue par les recollements suivant. Nous collons le segment inférieur r_{j_i} de chaque k -partie polaire triviale au bord de la partie non triviale du pôle P_{j_i} . Nous faisons les collages similaires, pour chacun des pôles d'ordre divisible par k dont le résidu est nul. Ensuite nous collons par translation les bords des k -parties polaires différentes de P_1 aux segments correspondants du bord de la k -partie polaire de P_1 . Cette construction est illustrée par la figure 4. La k -différentielle ξ associée à cette surface plate possède les ordres de pôles et les k -résidus souhaités.

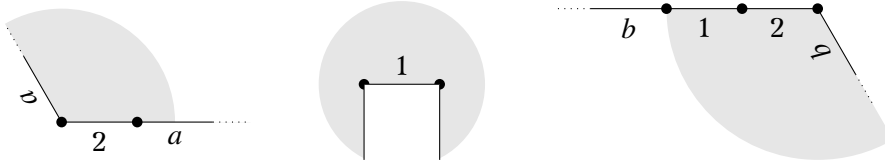


FIGURE 4. Une 3-différentielle de $\Omega^3 \mathcal{M}_0(8; -4, -4; -6)$ avec un résidu non nul au pôle d'ordre -6 .

Il reste donc à montrer que le genre de la surface est zéro et que la différentielle ξ possède un unique zéro. Pour cela, il suffit de vérifier que si l'on coupe la surface le long d'un lien selle, alors on sépare cette surface en deux parties. C'est une conséquence du fait que les liens selles correspondent aux bords des domaines polaires.

Il reste à considérer le cas où les k -résidus sont égaux à $(0, \dots, 0)$. Remarquons que s'il existe un pôle d'ordre $-k$, alors $(0, \dots, 0)$ n'est pas dans l'espace résiduel de la strate. Nous supposons donc que $s = 0$ dans la suite de la preuve. Par le lemme 3.1, il suffit de montrer que si $r \geq 2$ alors l'origine appartient à l'image de l'application k -résiduelle.

Soient P_1 et P_2 deux pôles d'ordres respectifs $-c_1$ et $-c_2$ non divisible par k . Pour tous les autres pôles nous associons la même k -partie polaire que précédemment. Plus précisément, pour chaque pôle d'ordre $-b_i$ divisible par k nous prenons une k -partie polaire d'ordre b_i associée à $(1; 1)$. Pour les pôles d'ordres non divisibles par k distincts de P_1 , nous prenons la k -partie polaire associée à $(1; \emptyset)$. Pour P_1 nous prenons la k -partie polaire d'ordre c_1 associée à $(\emptyset; (1^r))$.

Les collages sont les suivants. Nous collons le bord inférieur de la k -partie polaire du i -ième pôle d'ordre divisible par k au bord d'en haut du $(i+1)$ -ième pôle d'ordre divisible par k . Le bord inférieur de la k -partie polaire associée au pôle P_p est collé au bord du segment du pôle P_2 . Enfin, tous les segments restant sont collés au bord de la k -partie polaire associée à P_1 . Cette construction est illustrée par la figure 5. On vérifie facilement que cette surface possède les propriétés souhaitées. C.Q.F.D.

Nous réalisons une construction spécifique pour des strates ayant deux zéros.

Lemme 3.3. *Considérons la partition $\mu = (a_1, a_2; -b_1, \dots, -b_p; -c)$ où a_1, a_2 ne sont pas de la forme kl_i avec $l_i < p$. L'image de l'application k -résiduelle $\mathfrak{R}_0^k(\mu)$ contient l'origine.*

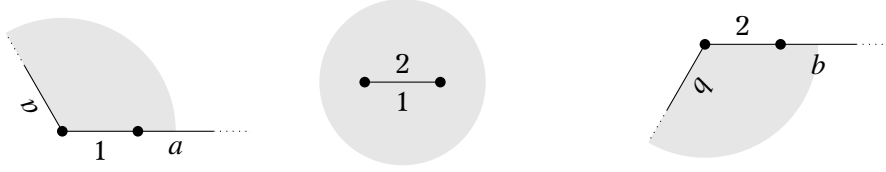


FIGURE 5. Une 3-différentielle de $\Omega^3\mathcal{M}_0(8; -4, -4; -6)$ avec un résidu nul.

Démonstration. Nous écrivons $a_i = kl_i + \bar{a}_i$ avec $-k < \bar{a}_1, \bar{a}_2 \leq 0$. Nous considérons deux cas selon que $l_1, l_2 \geq p$ ou s'il existe $l_i < p$.

Dans le cas où $l_1, l_2 \geq p$, on associe aux pôles d'ordres $-b_i$ les k -parties polaires d'ordres b_i et de types τ_i associées à $(1; 1)$. De plus, on choisit les types τ_i de telle sorte que la somme $\sum_i \tau_i$ soit inférieure ou égale à l_1 et maximale pour cette propriété. On note $\bar{l}_1 = l_1 - \sum_i \tau_i$. Pour le pôle d'ordre $-c$ on procède de la façon suivante. On prend la k -partie polaire d'ordre c associée à $(\emptyset; 1, \exp(i\pi + \bar{a}_2 \frac{2i\pi}{k}))$ et de type $\bar{l}_1 + 1$. Notons que cette construction est possible même si $\bar{a}_2 = 0$. On obtient la différentielle souhaitée en identifiant le bord inférieur de la k -partie polaire associée à P_i au bord supérieur de celle de P_{i+1} . Le bord supérieur de P_1 est identifié au segment 1 de la k -partie polaire d'ordre c . Le bord inférieur de la k -partie polaire d'ordre b_p est identifié par rotation au segment $\exp(\bar{a}_2 \frac{2i\pi}{k})$. Cette construction est illustrée à gauche de la figure 6.

Considérons le cas où il existe $l_i < p$ et $a_i \neq kl_i$. Nous supposons sans perte de généralité qu'il s'agit de l_1 . On associe au pôle d'ordre $-c$ la k -partie polaire d'ordre c associée à $(\emptyset; 1)$. Pour l'un des pôles d'ordre $-b_i$, disons $-b_1$, on associe la k -partie polaire d'ordre b_1 associée à $(1; v_1, v_2)$, avec v_i de même longueur, $v_1 + v_2 = 1$ et l'angle (dans la partie polaire) entre ces deux étant $2\pi + \frac{2\bar{a}_1\pi}{k}$. Comme $\bar{a}_1 \neq 0$, cette partie polaire est non dégénérée. Pour l_1 pôles d'ordre $-b_i$, on associe des k -parties triviales associées à $(v_1; v_1)$ et de type $\tau_i = b_i - 1$. On colle ces k -parties polaires de manière cyclique à v_1 et v_2 . Le point correspondant à l'intersection entre v_1 et v_2 est la singularité d'ordre a_1 . On associe aux autres pôles d'ordre $-b_i$ la k -partie polaire triviale associée à $(1; 1)$. On colle ces parties polaires de manière cyclique aux parties polaires d'ordres b_1 et c pour obtenir la surface plate souhaitée. Cette construction est illustrée à droite de la figure 6. C.Q.F.D.

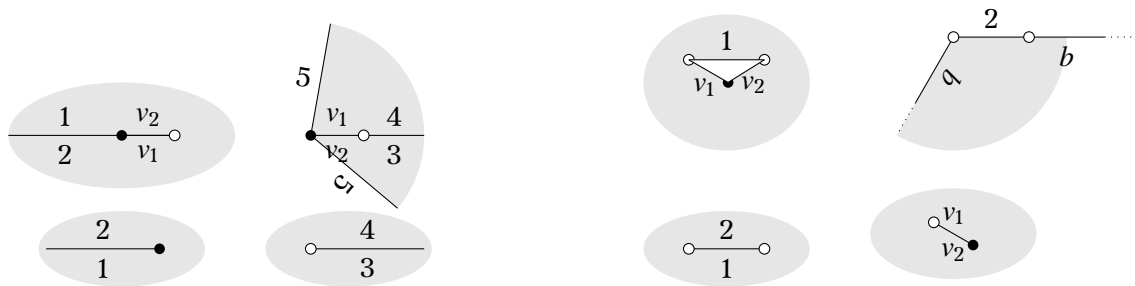


FIGURE 6. Une 3-différentielle de $\Omega^3\mathcal{M}_0(4, 6; -9; -7)$ (à gauche) et de $\Omega^3\mathcal{M}_0(2, 8; (-6^3); -4)$ (à droite) dont tous les 3-résidus sont nuls.

Nous traitons maintenant le cas général des strates ayant au moins deux zéros.

Lemme 3.4. *Considérons la partition $\mu = (a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p; -c_1, \dots, -c_r, (-k^s))$ avec $n \geq 2$. Si $r \geq 2$ ou $s \geq 1$, alors l'application k -résiduelle $\mathfrak{R}_0^k(\mu)$ est surjective. Dans le cas où $s = 0$ et $r = 1$ alors l'application contient le complémentaire de l'origine. De plus si au moins deux a_i ne sont pas divisibles par k ou si la somme des a_i divisibles par k est supérieure ou égale à kp alors l'application k -résiduelle contient l'origine.*

Démonstration. Si $r \geq 2$ ou $r = 1$ et $s \geq 1$, on peut simplement éclater le zéro des différentielles données par le lemme 3.2. On suppose maintenant $r = 1$ et $s = 0$. Par éclatement de zéros, il suffit de montrer que l'origine appartient à l'image de l'application résiduelle des strates $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -b_1, \dots, -b_p; -c)$ dans le cas où a_i n'est pas de la forme kl_i avec $l_i < p$. Le lemme 3.3 fournit la construction adéquate. C.Q.F.D.

4. LES PÔLES SONT DIVISIBLES PAR k ET STRICTEMENT SUPÉRIEURS À k EN GENRE ZÉRO

Cette section est dédiée aux strates de la forme $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p)$. Insistons sur le fait que dans cette section, nous ne considérons que les strates de k -différentielles primitives non vides. D'après le lemme 2.1, cela revient à supposer que $\text{pgcd}(a_1, \dots, a_n, k) = 1$. Enfin nous notons tout au long de cette section $b_i := kl_i$ et $a_i := kl_i + \bar{a}_i$ avec $-k < \bar{a}_i \leq 0$.

4.1. Obstruction. Dans le cas des strates de la forme $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p)$ il existe une unique obstruction que nous décrivons maintenant.

Lemme 4.1. *Soit $\mu = (a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p)$ une partition telle que a_1, a_2 sont premiers avec k et a_i est divisible par k pour $i \geq 3$. Si l'application résiduelle $\mathfrak{R}_0^k(\mu)$ contient $(0, \dots, 0)$, alors*

$$\sum_{i=3}^n a_i \geq kp. \quad (4.1)$$

La preuve repose sur l'étude du revêtement canonique d'une telle k -différentielle. Celui-ci est introduit et étudié dans la section 2.1 de [Bai+19]. Rappelons qu'il s'agit d'un revêtement $\pi: \widehat{X} \rightarrow X$ tel que $\pi^* \xi$ est la puissance k ième d'une différentielle abélienne.

Démonstration. Soit (\mathbb{P}^1, ξ) une k -différentielle dans la strate $\Omega^k \mathcal{M}_0(\mu)$ dont les résidus sont nuls. Son revêtement canonique $\pi: (\widehat{X}, \widehat{\omega}) \rightarrow (\mathbb{P}^1, \xi)$ est ramifié exactement aux singularités a_1 et a_2 . La surface de Riemann \widehat{X} est donc de genre zéro. Les singularités de la racine $\widehat{\omega}$ de $\pi^* \xi$ sont :

- deux zéros $\widehat{z}_1, \widehat{z}_2$ d'ordres $a_1 + k - 1$ et $a_2 + k - 1$ respectivement (car l'ordre de ramification du revêtement en ces points est k puisque a_1 et a_2 sont premiers avec k);
- pour chaque i tel que $3 \leq i \leq n$, il y a k zéros d'ordre $\frac{a_i}{k}$;
- pour chaque j tel que $1 \leq j \leq p$, il y a k pôles d'ordre $-\frac{b_j}{k}$ dont le résidu est nul.

Il s'ensuit que la différentielle abélienne $\widehat{\omega}$ est exacte. Pour toute fonction méromorphe $f: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\widehat{\omega} = df$, la symétrie du revêtement canonique implique que $f(\widehat{z}_1) = f(\widehat{z}_2)$. On supposera donc sans perte de généralité que $f(\widehat{z}_1) = f(\widehat{z}_2) = 0$. En tant que primitive de $\widehat{\omega}$, la fonction f a kp pôles d'ordres $1 - \frac{b_j}{k}$ (chacun de ces ordres étant présent k fois). La somme des ordres des pôles est donc $kp - \sum_{j=1}^p b_j$. Aux points \widehat{z}_1 et \widehat{z}_2 , la fonction f possède des zéros d'ordres $k + a_1$ et $k + a_2$. Cela implique que $2k + a_1 + a_2 \leq \sum_{j=1}^p b_j - kp$. De façon équivalente, $a_1 + a_2 \leq \sum_{i=1}^n a_i - kp$ et donc $\sum_{i=3}^n a_i \geq kp$. C.Q.F.D.

4.2. Constructions. Nous montrons maintenant que l'unique obstruction pour qu'un p -uplet soit dans l'image de l'application résiduelle est celle donnée dans le lemme 4.1. Rappelons la notation $b_i := kl_i$ et $a_i := kl_i + \bar{a}_i$ avec $-k < \bar{a}_i \leq 0$.

Nous commençons par le cas le plus simple et le plus intéressant de strates n'ayant qu'un pôle.

Lemme 4.2. *Soit $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -k\ell)$ une strate non vide de genre zéro. L'image de l'application résiduelle de cette strate est \mathbb{C} si $n \geq 3$ et \mathbb{C}^* si $n = 2$.*

Démonstration. Considérons les strates $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -k\ell)$ avec deux zéros d'ordres premiers avec k . Le lemme 4.1 implique que l'origine n'est pas dans l'image de l'application k -résiduelle. Comme cette strate est non vide, le résultat est démontré dans ce cas.

Nous considérons maintenant les strates $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -k\ell)$ avec $n \geq 3$ zéros. Notons que dans ce cas l'équation (4.1) est automatiquement satisfaite et nous allons montrer que tous les résidus sont réalisés. Comme $\text{pgcd}(a_1, a_2, a_3, k) = 1$, nous pouvons supposer que a_1 et a_2 ne sont pas divisibles par k .

Nous commençons par construire une k -différentielle dans la strate $\Omega^k \mathcal{M}_0(\bar{a}_1, \bar{a}_2, a'_3; -2k)$, où a'_3 est donné par la condition $\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + a'_3 = 0$. Notons qu'il existe un l'_3 tel que $a'_3 = l'_3 k + a'_3$. On se donne la k -partie polaire triviale d'ordre $2k$ associée à $(v_1, v_2; w_1, w_2)$ où les v_i, w_j sont définis comme suit. Dans le cas du résidu nul on impose $v_1 + v_2 = w_1 + w_2 = 1$ et dans le cas du résidu non nul $v_1 + v_2 \neq w_1 + w_2$. L'angle (dans les k -parties polaires respectives) formé au point de concaténation de v_1 et v_2 (resp. w_1 et w_2) est $(k + \bar{a}_1) \frac{2\pi}{k}$ (resp. $(k + \bar{a}_2) \frac{2\pi}{k}$). Nous obtenons une surface plate S_0 en collant (par rotation) v_1 avec v_2 et w_1 avec w_2 . Cette construction (ainsi que la suivante) est illustrée par la figure 7. Le pôle est clairement de k -résidu nul. De plus, les singularités d'ordre \bar{a}_i correspondent aux points d'intersections respectivement de v_1 avec v_2 et w_1 avec w_2 . Le zéro d'ordre a'_3 correspond aux autres sommets au bord des v_i et w_j . Les choix fait dans la construction impliquent que la k -différentielle possède les ordres souhaités.

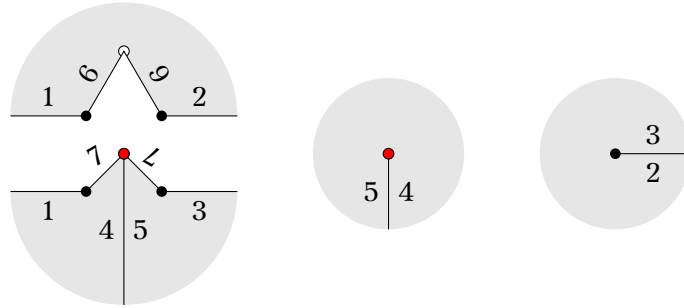


FIGURE 7. Différentielle sextique de $\Omega^6 \mathcal{M}_0(-1, 2, 5; -18)$ dont le 6-résidu est nul.

À présent, nous construisons une différentielle dans $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2, a_3; -k\ell)$ dont le k -résidu est nul. Nous partons de l'union disjointe de la surface plate S_0 de $\Omega^k \mathcal{M}_0(\bar{a}_1, \bar{a}_2, a'_3; -2k)$ construite au paragraphe précédent et de $l_1 + l_2 + l'_3$ plans. Dans chacun de ces plans, nous faisons une demi-fente respectivement vers le haut pour l_1 plans, vers le bas pour l_2 plans et vers la droite pour les l'_3 plans restants. À chaque singularité conique de S_0 nous faisons une demi-fente dans la direction correspondante. La surface plate S est obtenue en collant cycliquement les bords des fentes par translation. Il n'est pas difficile de vérifier que cette surface plate possède les propriétés souhaitées.

Enfin, pour $n > 3$ zéros, nous procédons par récurrence sur n en utilisant l'éclatement des zéros de la Proposition 2.6. Dans certains cas, il n'est pas possible d'obtenir une k -différentielle en éclatant un zéro d'une k -différentielle primitive. Toutefois, nous montrerons que toutes les k -différentielles peuvent s'obtenir en éclatant un zéro d'une k/d -différentielle primitive avec $d < k$. Nous venons de montrer que l'application résiduelle est \mathbf{C} pour $n = 3$. Il suffit donc de montrer qu'il existe a_i et a_j tels que $a_i + a_j > -k$ et $d := \text{pgcd}(\mu \setminus \{a_i, a_j\} \cup \{a_i + a_j\}, k) \neq k$. En effet, dans ce cas, on peut éclater le zéro d'ordre $a_i + a_j$ des k -différentielles qui sont la puissance d -ième d'une (k/d) -différentielle de la strate $\Omega^{k/d} \mathcal{M}_0\left(\frac{\mu}{d} \setminus \left\{\frac{a_i}{d}, \frac{a_j}{d}\right\} \cup \left\{\frac{a_i + a_j}{d}\right\}\right)$. La multiplicativité du k -résidu (cf. équation (2.1)) et le théorème 1.7 de [GT21b] si $k = 2d$ permettent alors de conclure.

Montrons que l'on peut toujours trouver deux ordres a_i et a_j comme ci-dessus. Supposons tout d'abord qu'il existe a_i, a_j tels que $a_i + a_j < -k$. En particulier, $-k < a_i, a_j < 0$ et donc l'addition de a_i à n'importe lequel des ordres positifs vérifie les conditions ci-dessus. Maintenant nous supposons que la somme de toutes les paires d'ordres a_i, a_j sont strictement supérieurs à $-k$. Dans le cas où $d = k$ pour un choix a_i, a_j , alors pour tout $l \neq i, j$ les a_l sont

divisibles par k . Donc a_i et a_j sont premiers avec k . En particulier, on peut choisir a_i et a_l pour $l \neq j$ pour obtenir la condition ci-dessus. C.Q.F.D.

Nous traitons maintenant le cas de $p \geq 2$ pôles. Nous commençons par traiter le cas du complémentaire de l'origine.

Lemme 4.3. *L'image de $\mathfrak{R}_0^k(a_1, a_2; -k\ell_1, \dots, -k\ell_p)$ avec $p \geq 2$ contient l'espace $\mathfrak{R}_0^k(\mu) \setminus \{(0, \dots, 0)\}$.*

Pour traiter les cas difficiles du lemme 4.3, nous donnons un résultat préliminaire que nous utiliserons comme une boîte noire dans la preuve du lemme.

Lemme 4.4. *On se donne un entier $k \geq 3$, une racine primitive k -ième de l'unité ζ , un nombre complexe $R \in \mathbb{C}^*$ et $s_1, s_2 \in \mathbb{C}$. Il existe $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^*$ et une racine k -ième r de R satisfaisant*

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 - s_1 &= 1 \\ s_2 - v_1 - \zeta v_2 &= r \end{aligned}$$

tels que les k -parties polaires associées à $(v_1, v_2; s_1)$ ou $(-s_1, v_1; -v_2)$ et à $(s_2; \zeta v_2, v_1)$ ou $(-s_2, \zeta v_2; -v_1)$ existent.

Démonstration. Les deux équations impliquent que

$$v_2 = \frac{1 + r + s_1 - s_2}{1 - \zeta} \text{ et } v_1 = -\frac{\zeta + r + \zeta s_1 - s_2}{1 - \zeta}.$$

Par hypothèse ζ est différente de 1 et donc ces vecteurs sont bien définis. De plus, comme $k \geq 3$ il existe au moins un choix de r tel que $v_1, v_2 \neq 0$. Pour ce choix de r , on peut former les k -parties polaires généralisées de la façon suivante. Nous traiterons la première k -partie polaire du lemme, l'autre étant similaire. Pour simplifier, nous supposons que v_1 est réel positif. On concatène v_1 et v_2 , avec v_2 considéré comme au dessous de v_1 si v_2 est réel négatif.

Dans le cas où v_2 ou s_1 n'est pas un réel strictement négatif, on va construire la k -partie polaire associée à $(v_1, v_2; s_1)$. On concatène le point final de v_1 au point initial de v_2 . Comme v_2 et s_1 ne sont pas tous les deux des réels strictement négatifs, il existe $\epsilon > 0$ et une demi-droite d^- de vecteur directeur dans $[\pi - \epsilon; \pi]$ dont les concaténations aux points initiaux de v_1 et s_1 n'intersecte pas le reste des segments. De même, il existe une demi-droite d^+ de vecteur directeur dans $[0, \epsilon]$ qui n'intersecte pas le reste de la concaténation en partant des points finaux de v_2 et s_1 . On considère les parités du plan qui se trouve au dessus du vecteur v_1 et en dessous de s_1 . Enfin, il reste à identifier les deux demi-droites d^- et les deux demi-droites d^+ par translations pour obtenir la k -partie polaire souhaitée.

Dans le cas où v_2 et s_1 n'est pas un réel strictement négatif, on fait la construction précédente avec les vecteurs $(-s_1, v_1; -v_2)$. C.Q.F.D.

Nous passons maintenant à la preuve du lemme 4.3.

Démonstration du lemme 4.3. Nous supposons que les pôles dont le k -résidu est nul sont P_1, \dots, P_t et que les k -résidus R_{t+1}, \dots, R_p aux pôles P_{t+1}, \dots, P_p sont non nuls.

L'entier a_1 satisfait $-k < a_1 < 0$. Soit $R = (R_1, \dots, R_p) \neq (0, \dots, 0)$, on construit une k -différentielle dont les k -résidus sont R de la manière suivante. Pour $i > t$, nous prenons une racine k -ième r_i de R_i telle que $\Re(r_i) \geq 0$. Nous choisissons une racine r_1 de R_1 telle que la somme $S = \sum_{i \geq 2} r_i - r_1$ est non nulle. Nous définissons v_1 et v_2 deux vecteurs de même longueur, tels que l'angle entre v_1 et v_2 est $2\pi + \frac{2a_1\pi}{k}$, et de somme égale à $S = \sum_{i \geq 2} r_i - r_1$. Notons que ces vecteurs sont non nuls.

Prenons le pôle P_1 d'ordre $-k\ell_1$ et de k -résidu R_1 . On associe alors à ce pôle la k -partie polaire triviale d'ordre $k\ell_1$ associée à $(v_1, v_2; r_{t+1}, \dots, r_p)$ si $R_1 = 0$ et la k -partie polaire non triviale associée à $(v_1, v_2; r_2, \dots, r_p)$ si $R_1 \neq 0$. Notons que l'angle (calculé dans D^+) au point

d'intersection des v_i est $2\pi + \frac{2a_1\pi}{k}$. Pour les autres pôles P_i , on prend une k -partie polaire associée à $(r_i; \emptyset)$ si $R_i \neq 0$ et $(r_{j_i}; r_{j_i})$ avec $j_i > t$ si $R_i = 0$. Il reste à identifier tous les segments par translation à exception des v_i que nous identifions par rotation. On vérifie de manière analogue à précédemment que cette surface plate possède les invariants locaux souhaités.

Les entiers a_1 et a_2 sont supérieurs ou égaux à 0. Nous supposons que $l_1 \leq l_2$ dans l'écriture $a_i = kl_i + \bar{a}_i$. La construction dépend de l'existence, ou non, d'un entier $m \leq t$ tel que

$$\ell_m^- := \sum_{i=1}^{m-1} (\ell_i - 1) < l_1 \leq \sum_{i=1}^m (\ell_i - 1). \quad (4.2)$$

Il existe un entier m satisfaisant l'équation (4.2). On associe au pôle P_m la k -partie polaire d'ordre $k(\ell_m - (l_1 - \ell_m^-) + 1)$ et de type $\ell_m - (l_1 - \ell_m^-)$ associée à $(v_1, v_2; r_{t+1}, \dots, r_p)$ où les v_i sont de même longueur, $v_1 + v_2 = \sum r_i$ et l'angle à leur intersection est $2\pi + \frac{2\bar{a}_1\pi}{k}$. Puis on coupe cette partie polaire par une demi-droite commençant au point d'intersection de v_1 et v_2 . Enfin on colle de manière cyclique $(l_1 - \ell_m^- - 1)$ domaines basiques triviaux à cette demi droite. En prenant les r_i tels que $\Re(r_i) \geq 0$, la ligne brisée formée des r_i ne possède pas de points d'auto-intersection. Ensuite, on associe aux $m - 1$ premiers pôles la k -partie polaire d'ordre b_i et de type 1 associée à $(v_1; v_1)$. On colle les bords de ces k -parties polaires entre elles par translation de manière cyclique. Les segments v_1 et v_2 de la k -partie polaire spéciale sont collés aux bords restant par rotation et translation. Pour les autres pôles P_i d'indices $m < i \leq t$, on prend la k -partie polaire associée à $(r_{j_i}; r_{j_i})$ avec $j_i > t$. Les identifications sont données comme précédemment. Cette construction est illustrée par la figure 8. Cela définit une k -différentielle avec les invariants locaux souhaités.

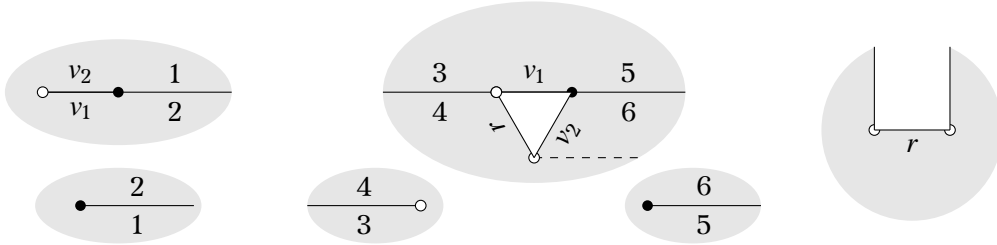


FIGURE 8. Une 6-différentielle dans $\Omega^6 \mathcal{M}_0(17, 25; -12, -18, -24)$ avec un unique 6-résidu non nul au pôle d'ordre -12 .

Il n'existe pas d'entier m satisfaisant à l'équation (4.2). Dans ce cas, il existe au moins deux pôles dont le k -résidu est non nul. Nous commençons par supposer qu'il existe deux pôles dont les k -résidus sont non nuls et de plus qu'ils sont d'ordre $-2k$. Nous allons utiliser les k -parties polaires présentées dans le lemme 4.4 avec $s_1 = s_2 = 0$. On se donne les k -parties polaires $(v_1, v_2; \emptyset)$ et $(\emptyset; v_1, \zeta v_2)$ avec $\zeta = \exp(2ia\pi/k)$ et les v_i donnés par le lemme 4.4. On identifie les deux vecteurs v_1 par translation et les vecteurs v_2 et ζv_2 par rotation. On obtient des k -différentielles avec deux zéros d'ordres respectifs $k - a$ et $k + a$, et deux pôles d'ordre $-2k$ de k -résidus proportionnels à 1 et R . On obtient donc tous les invariants souhaités. Si les deux pôles ne sont pas d'ordres $-2k$, on obtient tous les invariants en coupant ces k -différentielles le long de demi-droites partant des zéros et en ajoutant des plans de manière cyclique. Notons que cette méthode permet d'obtenir tous les invariants. Enfin, s'il existe des pôles dont le k -résidu est nul, on coupe ces k -différentielles le long de liens selles entre les zéros et on colle cycliquement les k -parties polaires correspondant à ces pôles. On obtient de cette façon tous les ordres de zéros satisfaisant à l'équation (4.2).

Maintenant, on considère le cas où au moins trois pôles ont un k -résidu non nul. Supposons tout d'abord qu'il n'y a pas de pôles dont le résidu est nul. On prend les deux pôles, disons P_p et P_{p-1} , d'ordres b_i maximaux parmi les pôles ayant un k -résidu non nul. On partitionne les autres pôles avec un k -résidu non nul en deux parties A_i . Ces deux parties sont telles que les deux sommes $S_i := \sum_{P_j \in A_i} \ell_j$ soient respectivement inférieures ou égales à l_i . Notons que cette condition peut toujours être satisfaite. En effet, l'égalité $l_1 + l_2 = 1 + \sum_i \ell_i$ et la maximalité de ℓ_p et ℓ_{p-1} impliquent que $\ell_{p-2} \leq (l_1 + l_2)/2$ et donc que $\ell_{p-2} \leq l_2$. On conclut par récurrence sur le nombre de pôles dont le résidu est non nul. On notera $A_1 = \{P_{t+1}, \dots, P_{p_0}\}$ et $A_2 = \{P_{p_0+1}, \dots, P_{p-2}\}$. Pour les pôles de A_i , prenons des racines r_j des R_j telles que $(-1)^{i+1} \Re(r_j) > 0$.

La k -différentielle avec les invariants souhaités est obtenue de la façon suivante. On pose $s_1 = \sum_{j=t+1}^{p_0} r_j$ et $s_2 = \sum_{j=p_0+1}^{p-2} r_j$. On utilise alors le lemme 4.4 pour obtenir les k -parties polaires associées à $(v_1, v_2; s_1)$ et $(s_2; \zeta v_2, v_1)$ pour la racine $\zeta = \exp(2i\pi \bar{a}_1/k)$. On associe aux pôles de A_1 les parties polaires de type b_i associées à $(r_i; \emptyset)$ et à ceux de A_2 celles de type b_j associées à $(\emptyset; -r_j)$. On considère des polygones donnés par la concaténation des vecteurs $(-s_1, r_{t+1}, \dots, r_{p_0})$ et $(s_2, -r_{p_0+1}, \dots, -r_{p-2})$. On colle ces polygones aux parties polaires associées à P_p et P_{p-1} . Puis on fait de même avec les autres pôles de résidus non nuls. Cela permet d'obtenir les différentielles avec les invariants souhaités.

Enfin si il existe des pôles avec des résidus nuls. Comme l'équation (4.2) est satisfaite, on peut quitter les $\ell_i - 1$ à l_1 et 1 à l_2 pour chaque P_i . On obtient des nouveaux l_i positifs. On fait alors la construction précédente puis on colle les pôles avec des résidus nul de façon cyclique en coupant un lien-selle entre les deux zéros. C.Q.F.D.

Nous traitons maintenant le cas avec $n \geq 3$ zéros.

Lemme 4.5. *L'image de $\mathfrak{R}_0^k(a_1, \dots, a_n; -kl_1, \dots, -kl_p)$ avec $n \geq 2$ et $p \geq 1$ contient l'espace $\mathfrak{R}_0^k(\mu) \setminus \{(0, \dots, 0)\}$.*

Démonstration. Le lemme 2.9 établit que tant que $k \geq 3$ et $n \geq 3$, alors toute k -différentielle primitive d'une strate de partition $(a_1, \dots, a_n; -kl_1, \dots, -kl_p)$ peut s'obtenir par éclatement de zéros en partant d'une strate qui, si elle n'est pas faite de k -différentielles primitives, n'est pas pour autant faite de puissances de 1-formes ou de différentielles quadratiques. La proposition 2.6 montre que cette opération ne va pas modifier les résidus aux pôles.

Les lemmes 4.2 et 4.3 montrent que l'image de l'application résiduelle contient le complémentaire de l'origine pour toutes les strates telles que $n = 2$. L'éclatement permet d'obtenir des k -différentielles primitives avec ces résidus dans tous les cas pour lesquels $n \geq 3$. C.Q.F.D.

Nous montrons maintenant que dans le cas où uniquement deux zéros sont d'ordres non divisibles par k , la condition du lemme 4.1 est suffisante pour que l'origine soit dans l'image de l'application k -résiduelle.

Lemme 4.6. *Soit $\mu = (a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p)$ une partition telle que a_1 et a_2 ne sont pas divisibles par k et a_i est divisible par k pour $i \geq 3$. Si l'équation (4.1) est satisfaite, ie $\sum_{i=3}^n a_i \geq kp$, alors l'application résiduelle $\mathfrak{R}_0^k(\mu)$ contient l'origine.*

Rappelons les notations $a_i = kl_i + \bar{a}_i$ avec $0 \geq \bar{a}_i > -k$ et $b_i = kl_i$.

Démonstration. Nous allons démontrer le cas $n = 3$. En éclatant a_3 on en déduit le cas général. En effet, les seuls ordres de singularités qui ne sont pas divisible par k sont a_1 et a_2 . Il s'ensuit que $\text{pgcd}(a_1, a_2) = 1$. Ainsi, la strate satisfaisant $n = 3$ à partir de laquelle nous procédons à l'éclatement de singularité est nécessairement primitive.

Nous considérerons deux cas, selon que l'équation

$$l_1 + l_2 \geq p - 1 \tag{4.3}$$

soit satisfaite ou non.

L'équation (4.3) est satisfaite. Commençons par le cas où tous les pôles sont d'ordre $2k$. Dans ce cas les équations (4.3) et (4.1) impliquent que $l_1 + l_2 = p - 1$. On prend une k -partie polaire d'ordre $2k$ associée à $(v_1, \zeta v_1; v_1, \zeta v_1)$ avec ζ la racine k -ième de l'unité telle que l'angle au dessus du point d'intersection entre v_1 et ζv_1 est égal à $(k + \bar{a}_1) \frac{2\pi}{k}$. Pour tous les autres pôles on prend la k -partie polaires d'ordre $2k$ associées à $(v_1; v_1)$. On colle cycliquement l_1 parties polaires aux vecteurs supérieurs v_1 et αv_1 et l_2 parties polaires aux vecteurs supérieurs. Cette construction est représentée dans la figure 9.

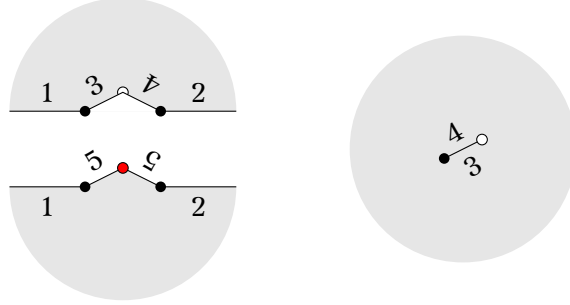


FIGURE 9. Différentielle cubique de $\Omega^3 \mathcal{M}_0(6, 2, -2; -6, -6)$ dont les 3-résidus sont nuls.

On suppose maintenant que les pôles b_i sont arbitraires. La construction est similaire à celle que nous venons de faire. La partie polaire associée à $(v_1, \zeta v_1; v_1, \zeta v_1)$ est le pôle d'ordre minimal P_1 . On considère alors des pôles P_i distincts de P_1 tels que $\sum(\ell_i - 1) \leq l_1 < \ell_1 + \sum(\ell_i - 1)$. On colle alors de manière cyclique les parties polaires associées aux P_i au v_1 supérieur, de telle sorte que toutes ces parties polaires contribuent de l'angle $(\ell_i - 1)2\pi$ à l'angle de a_1 . Pour finir nous coupons la k -partie polaire de P_1 à partir de a_1 par une demi-droite et collons le nombre de plan nécessaire pour obtenir l'ordre a_1 . On fait de même pour a_2 afin d'obtenir les invariants souhaités.

L'équation (4.3) n'est pas satisfaite. Nous considérons deux k -parties polaires d'ordre $2k$ associées respectivement à $(v_1, \zeta v_1; v_2)$ et à $(v_2; v_1, \zeta v_1)$ satisfaisant les conditions suivantes. L'angle au dessus du point d'intersection entre v_1 et ζv_1 est égal à $(k + \bar{a}_1) \frac{2\pi}{k}$. On a l'égalité $v_2 = v_1 + \zeta v_1$. On considère $l_1 + l_2$ k -parties polaires associées à $(v_1; v_1)$ et les autres sont associées à $(v_2; v_2)$. On colle cycliquement l_1 des premières au v_1 supérieur, les l_2 autres au v_1 inférieur et enfin les autres entre les v_2 . Chacune des $l_1 + l_2$ parties polaires associées à $(v_1; v_1)$ contribue d'un angle 2π au zéro correspondant. C.Q.F.D.

Enfin nous montrons que s'il existe au moins trois zéros d'ordres non divisibles par k , alors l'origine est toujours dans l'image de l'application k -résiduelle.

Lemme 4.7. *Considérons la partition $\mu = (a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p)$. Si au moins trois des ordres a_1, \dots, a_n ne sont pas divisibles par k , alors l'application résiduelle $\mathfrak{R}_0^k(\mu)$ contient $\{0\}$.*

Démonstration. Nous démontrons le lemme dans le cas $n = 3$. L'éclatement des singularités coniques permet d'en déduire le cas général (voir le lemme 2.9).

Si $l_3 > p$, alors les constructions données dans la preuve du lemme 4.6 permettent alors d'obtenir les k -différentielles avec les invariants souhaités.

Nous supposons maintenant que nous $l_i \leq p$ pour $i = 1, 2, 3$. Dans ce cas, nous donnons deux constructions selon que $\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3 = -2k$ ou $\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3 = -k$.

Dans le cas où $\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3 = -2k$, ces k -différentielles sont formées de deux triangles plats, dont les côtés sont reliés deux à deux par des chaînes de domaines polaires de valence 2. Dans l'une de ces chaînes les identifications sont des translations et dans les deux autres chaînes, ce sont des translations et une rotation. Chaque zéro correspond à un sommet de chaque triangle et à l'un des deux sommets de chaque domaine polaire dans

deux des trois chaînes. Comme les sommets des triangles contribuent à chaque singularité d'un angle strictement inférieure à 2π cet angle est égal à $(k + \bar{a}_i)\frac{2\pi}{k}$. Comme l'angle total des deux triangles est 2π , nous en déduisons que $\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3 = -2k$. Chaque domaine polaire contribue aux angles de deux des trois singularités en ajoutant ℓ_i fois 2π à ceux-ci. Maintenant, on met tous les domaines polaires sur les deux chaînes qui bordent z_3 , où l'on suppose $l_1 \leq l_2 \leq l_3$. Dans ce cas, chacun des p domaines polaires contribuera d'un angle d'au moins 2π à chaque zéro. Donc la condition implique que $l_1 + l_2 \geq p$. Cette condition est vérifiée car comme $kl_1 + kl_2 + kl_3 = \sum_{j=1}^p b_j$ implique que $l_1 + l_2 + l_3 \geq 2p$ et donc si nous avons $l_1 + l_2 < p$ alors nous aurions $l_3 > p$.

Pour finir, il reste à traiter le cas où $\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3 = -k$. Ce cas se traite de manière similaire au cas précédent en remplaçant chaque triangle par une partie polaire associée au complémentaire du triangle. C.Q.F.D.

5. LES PÔLES SONT DIVISIBLES PAR k EN GENRE ZÉRO

Cette section contient la preuve de la surjectivité de l'application k -résiduelle des strates $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p; (-k^s))$ avec $p \neq 0$ et $s \neq 0$. Rappelons que nous ne considérons que les strates non vides, c'est à dire telles que $\text{pgcd}(a_1, \dots, a_n, k) = 1$. Enfin nous notons $b_i := kl_i$ et $a_i := kl_i + \bar{a}_i$ avec $-k < \bar{a}_i \leq 0$.

Nous commençons par les strates avec deux zéros d'ordres a_1 et a_2 . Le premier cas est celui avec un unique pôle d'ordre $-k$ et un unique pôle d'ordre strictement inférieur à $-k$.

Lemme 5.1. *Les applications résiduelles des strates $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -k\ell; -k)$ avec $\ell \geq 2$ sont surjectives.*

Démonstration. Nous traitons tout d'abord le cas où $\ell = 2$. Soit il existe a_i , disons a_1 tel que $-k < a_1 < 0$, soit on a $0 < a_1, a_2 < k$. On dénote le k -résidu au pôle d'ordre $-2k$, resp. $-k$, par R , resp. R_1 . Quitte à multiplier les k -résidus par une constante, on peut supposer que $R_1 = 1$ et on considèrera la racine $r_1 = 1$ de R_1 . Nous distinguerons trois cas, les deux premiers sont représentés dans la figure 10 et le troisième dans la figure 11.

Dans le cas où $-k < a_1 < 0$, on associe au pôle d'ordre $-2k$ la k -partie polaire d'ordre $2k$ associée à $(v_1, v_2; 1)$ telle que l'angle au point d'intersection de la concaténation des v_i soit $2\pi + \frac{2a_1\pi}{k}$, que les longueurs des v_i soient identiques et $v_1 + v_2 - 1$ est égale à une racine de R dont la partie réelle est positive. On colle alors au segment 1 une k -partie polaire d'ordre k associée à 1 et les v_i ensemble. Le zéro d'ordre a_1 se trouve à l'intersection de v_1 et v_2 et celui d'ordre a_2 est constitué des autres sommets. Le pôle d'ordre $-k$ est égal à 1^2 et celui d'ordre $-2k$ est égal à R . Cette surface vérifie donc les propriétés souhaitées.

Dans le cas où $0 < a_1, a_2 < k$ la construction est la suivante. Si $|R| > 1$ on considère la k -partie polaire d'ordre $2k$ associée à $(\emptyset; v, 1, \alpha v)$ telle que $\alpha = \exp(i\pi + \frac{2ia_2\pi}{k})$ et $v + 1 + \alpha v = -r$ où r est une racine k -ième de partie réelle négative de R . Notons que la solution à cette équation est

$$v = -\frac{1+r}{1+\alpha}.$$

Remarquons que si $a_1 < a_2$ alors v et αv ne peuvent pas être des réels négatifs. En revanche, si $a_1 > a_2$, alors v peut être un réel négatif et dans ce cas, on le considère comme au dessus du segment 1 dans la concaténation suivante. On considère la concaténation de v , 1 puis αv . Elle est sans points d'auto-intersections. On colle alors au segment 1 une k -partie polaire d'ordre k associée à $r_1 = 1$ et les v ensemble par rotation. Comme l'angle de la singularité au bord du cylindre est d'angle π pour le cylindre auquel on ajoute $\pi - \frac{2a_2\pi}{k}$ on en déduit que le zéro est d'ordre a_1 . La surface obtenue vérifie donc les propriétés souhaitées.

Supposons maintenant que $|R| \leq 1$. Définissons $\zeta_j = \exp(\frac{2i\bar{a}_j\pi}{k})$. Soit r une racine k -ième de R dont la partie réelle est maximale parmi les racines de R , on considère v satisfaisant

$$\zeta_j v - 1 - v = r.$$



FIGURE 10. Différentielles quartiques dans $\Omega^4\mathcal{M}_0(-1, 5; -8; -4)$ à gauche et dans $\Omega^4\mathcal{M}_0(1, 3; -8; -4)$ à droite. Les résidus quartiques sont respectivement $(0, 1)$, $(16, 1)$.

La solution de cette équation est donnée par

$$v = \frac{1+r}{\zeta_j - 1}.$$

Notons que $\arg(1+r) \in [-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}]$ car l'argument de r est dans $[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}]$. De plus, comme $\bar{a}_1 + \bar{a}_2 = -k$, il existe j tel que la partie imaginaire de v est strictement négative. On considère alors pour ce j la k -partie polaire d'ordre $2k$ associée à $(\zeta v; 1, v)$. La différentielle est obtenue en collant les segments v entre eux par rotation et une partie polaire d'ordre k associée à (1) au segment 1. Justifions que la surface plate obtenue possède les invariants souhaités. Considérons la singularité correspondant au bord du cylindre (le point blanc sur la figure 11). Comme v et ζv sont identifiés par une rotation d'angle $2\bar{a}_j\pi/k$ on en déduit que l'angle de cette singularité est $4\pi + 2\bar{a}_j\pi/k$. C'est donc un zéro d'ordre a_j comme souhaité.

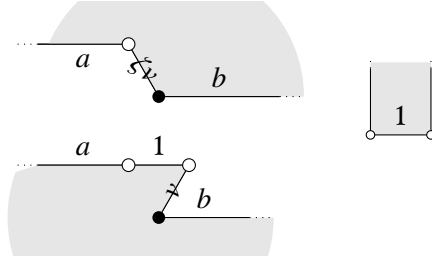


FIGURE 11. Différentielle quartiques dans $\Omega^4\mathcal{M}_0(1, 3; -8; -4)$ avec $|R| \leq 1$

Nous traitons maintenant le cas où $\ell \geq 3$. On part d'une surface plate ayant les k -résidus souhaités dans la strate $\Omega^k\mathcal{M}_0(a'_1, a'_2; -2\ell; -k)$ telle que $a_i = a'_i + l'_i k$ avec $l'_i \geq 0$. On coupe alors une demi-droite partant du zéro d'ordre a'_i et on colle de manière cyclique l'_i plans possédant la même fente. C.Q.F.D.

Nous déterminons maintenant l'image de l'application résiduelle des strates de la forme $\Omega^k\mathcal{M}_0(a_1, a_2; -k\ell; -k, -k)$.

Lemme 5.2. *Les applications résiduelles des strates de la forme $\Omega^k\mathcal{M}_0(a_1, a_2; -k\ell; -k, -k)$ sont surjectives pour tout $\ell \geq 2$.*

Démonstration. Nous commençons par traiter le cas $\ell = 2$. La construction est similaire à celle du lemme 5.1 et nous allons souligner les différences. Dans le cas où $-k < a_i < 0$ il suffit d'utiliser une partie polaire de la forme $(v, \alpha v; r_1, r_2)$ telle que l'angle au point d'intersection entre v et αv soit $2\pi + \frac{2a_i\pi}{k}$. Nous nous concentrerons donc sur le cas où $0 < a_1 < k < a_2 < 2k$.

Nous traitons tout d'abord le cas où les résidus sont $(0; 1, (-1)^k)$. On considère la k -partie polaire d'ordre $2k$ associée à $(\exp(2i\bar{a}_2\pi/k), 1; \exp(2i\bar{a}_2\pi/k), 1)$. On colle par rotation le segment 1 de la partie supérieure au $\exp(2i\bar{a}_2\pi/k)$ de la partie inférieure. On colle des demi-cylindres infinis aux deux autres segments. Le résidu du pôle d'ordre $-2k$ est égal à 0, celui du pôle d'ordre $-k$ collé au segment 1 est égal à 1 et enfin celui du pôle collé au segment $\exp(2i\bar{a}_2\pi/k)$ est égal à $(-1)^k$. Enfin considérons la singularité conique qui se trouve à gauche des segments $\exp(2i\bar{a}_2\pi/k)$. Son angle total est de π pour le cylindre auquel on ajoute 2π pour les angles à gauche des segments $\exp(2i\bar{a}_2\pi/k)$ puis $\pi + 2\bar{a}_2\pi/k$ pour l'angle entre les segments $\exp(2i\bar{a}_2\pi/k)$ et 1. Cela donne bien une singularité d'angle $4\pi + 2\bar{a}_2\pi/k$ et correspond au zéro d'ordre $k + \bar{a}_2$. L'ordre de l'autre zéro se calcule de manière similaire.

Dans les autres cas, notons R le résidu au pôle d'ordre $-2k$ et R_1, R_2 les résidus aux pôles d'ordre $-k$. On commence par choisir des racines r_i des R_i telles que r_1 , resp. r_2 , est de partie réelle négative, resp. positive et tel que $r_1 - r_2 \neq 0$ si $R = 0$. Notons qu'il existe toujours de telles racines car les cas $(0; 1, (-1)^k)$ ont déjà été traités. Si $|R_2| \leq |R_1|$ alors on considère la k -partie polaire d'ordre $2k$ associée à $(-r_1; v, r_2, \alpha v)$ telle que $\alpha = \exp(2\bar{a}_2i\pi/k)$ et la somme $r_1 + v + r_2 + \alpha v$ est égale à l'opposé d'une racine r de R . L'existence d'une telle partie polaire est justifiée dans la preuve précédente où elle correspond au cas $|R| > 1$.

Si $|R_1| < |R_2|$ alors on considère une construction un peu plus générale. En effet, la partie polaire $(-r_1; v, r_2, \beta v)$ avec $\beta = \exp(2\bar{a}_1i\pi/k)$ peut avoir des auto-intersections. Nous considérons donc un quart de plan dont le bord est v et un quart de plan dont le bord est la concaténation de r_2 et βv . Puis nous collons ces deux quart de plan ensemble pour obtenir l'équivalent la partie inférieure de la partie polaire. L'autre moitié est associée à $-r_1$ et on obtient ainsi l'équivalent à la partie polaire $(-r_1; v, r_2, \beta v)$.

Dans les deux cas, la k -différentielle est alors obtenue en collant des demi-cylindres infinis aux segments r_i et les segments v et αv , resp. βv entre eux. La singularité au bord du cylindre de résidu R_2 est d'angle π auquel on ajoute $\pi - \frac{2\bar{a}_2\pi}{k}$, resp. $\pi - \frac{2\bar{a}_1\pi}{k}$. On en déduit que le zéro est d'ordre a_1 , resp. a_2 .

Pour terminer la surjectivité des applications résiduelles $\mathfrak{R}_0^k(a_1, a_2; -k\ell; -k, -k)$, s'obtient de la façon suivante. On part des surfaces dans les strates $\mathfrak{R}_0^k(a'_1, a'_2; -2\ell; -k, -k)$ et on ajoute des multiples de $2k$ aux zéros de ces strates. Pour cela on coupe ces surfaces le long de demi-droites infinies partant des singularités et on colle les plans de manière à obtenir les zéros souhaités. C.Q.F.D.

Nous considérons maintenant le cas des strates ayant des nombres arbitraires non nuls de pôles d'ordre $-k\ell$ et $-k$.

Lemme 5.3. *Les applications résiduelles des strates $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -k\ell_1, \dots, -k\ell_p; (-k^s))$ avec $p \geq 1$ et $s \geq 1$ sont surjectives.*

Démonstration. Nous commençons par décrire la procédure de la construction puis nous justifierons qu'elle nous permet d'obtenir tous les invariants.

La procédure. On sélectionne pour commencer un pôle d'ordre $< -k$, disons P_1 . On partitionne les pôles d'ordre $-k$ et les pôles d'ordres $< -k$ de résidus non nul, en excluant P_1 si son résidu est non nul, en deux ensembles S_1 y S_2 . L'ensemble S_i contribue exclusivement à la singularité a_i . Enfin les pôles d'ordres $< -k$ dont le résidu est nul, en excluant P_1 si son résidu est nul, sont partitionnés en trois ensembles E_j . L'ensemble E_1 , resp. E_2 , contribue exclusivement à a_1 , resp. a_2 , et E_3 aux deux zéros.

Dans le cas où S_1 et S_2 sont tous les deux non vides on fait la construction suivante. On choisit une racine r_i des k -résidus que l'on supposera de partie réelle négative pour les pôles de S_1 et positive pour ceux de S_2 . Notons $\tilde{r}_1 = \sum_{i \in S_1} r_i$ et $\tilde{r}_2 = \sum_{i \in S_2} r_i$. Nous considérons alors la k -partie polaire d'ordre $k\ell_1$ associée à $(-\tilde{r}_1; v, \tilde{r}_2, \alpha v)$ telle que la somme $\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2 + v + \alpha v$ est l'opposé d'une racine du résidu de P_1 . Quitte à changer la numérotation, on peut supposer que S_1 contient les pôles d'indices $2, \dots, \tau$ et S_2 d'indices $\tau + 1, \dots, \sigma$. On considère deux

polygones dont les arêtes sont respectivement $(\tilde{r}_1, -r_2, \dots, -r_\tau)$ et $(-\tilde{r}_2, r_{\tau+1}, \dots, r_\sigma)$ et ne sont pas dégénérés. On colle ensuite ces polygones aux segments $-\tilde{r}_1$ et \tilde{r}_2 de la k -partie polaire. On ajoute de manière cyclique les pôles de E_i pour $i = 1, 2$ respectivement à r_2 et $r_{\tau+1}$. Puis on ajoute les pôles de S_3 en les collant à v de manière cyclique. Enfin, on identifie le segment v à αv par rotation (et translation) et on colle des demi-cylindres infinis aux autres segments.

Dans le cas où $S_1 = \emptyset$ on fait la construction comme au paragraphe précédent à partir de la k -partie polaire d'ordre $k\ell_1$ associée à $(v, \alpha v; \tilde{r}_2)$ telle que la somme $v + \alpha v - \tilde{r}_2$ est une racine du résidu de P_1 .

Les deux constructions ont été utilisées dans les lemmes précédents. Dans la suite nous justifierons que les parties polaires considérées existent.

Obtenir les invariants. Nous justifions qu'un choix judicieux des valeurs précédentes permet d'obtenir toutes les valeurs possible pour les ordres de zéros.

Considérons le cas où il y a un unique pôle d'ordre $< -k$. Les ensembles S_i sont constitués uniquement de pôles d'ordre $-k$ et les ensembles E_i sont vides. On choisit les ensembles S_1 et S_2 de cardinaux respectifs l_1 et $l_2 - 1$ tels que $|\tilde{r}_1| \leq |\tilde{r}_2|$. Cela assure l'existence de la partie polaire comme dans le lemme 5.2. Le nombre complexe α est égal à $\exp(i\pi + \frac{2i\tilde{a}_2\pi}{k})$ et cela permet d'obtenir les zéros d'ordres souhaités.

Supposons maintenant qu'il existe au moins deux pôles d'ordres $< -k$. Nous commençons en supposant que tous les k -résidus aux pôles P_i d'ordres $-k\ell_i$ sont non nuls, i.e. les ensembles E_i sont vides. On déduit du fait que $s \geq 1$ et $p \geq 2$ qu'il existe un ℓ_i tel que $\ell_i \leq \max\{l_1, l_2\}$. Par récurrence et quitte à permuter les indices, on peut supposer que les ensembles S_i sont $S_1 = \{P_2, \dots, P_i\}$ et $S_2 = \{P_{i+1}, \dots, P_p\}$ avec $\sum_{i=2}^i \ell_i \leq l_1$ et $\sum_{i=i+1}^p \ell_i \leq l_2$. On fait alors la construction du paragraphe précédent. Comme la construction du lemme 5.2 permet d'avoir n'importe quel zéro au bord de la plus longue concaténation, le choix des racines peut être fait arbitrairement. Puis on conclut en s'assurant que P_1 contribue à chaque zéro de la quantité manquante. Pour cela il suffit de couper la partie polaire le long de demi-droite initiant aux zéros et collé le nombre adéquat de plans.

Supposons maintenant qu'il existe des pôles dont les k -résidus sont nuls. On commence par partitionner ces pôles dans les ensembles E_1 et E_2 de telle sorte que $\sum_{P_i \in E_j} (\ell_i + 1) < l_j$. Les autres pôles vont dans l'ensemble E_3 . On peut alors partitionner les pôles dont les résidus sont non nuls de la même façon qu'au paragraphe précédent. La fin de la preuve consiste à faire la procédure avec ces partitions et $\alpha = \exp(i\pi + \frac{2i\tilde{a}_2\pi}{k})$. C.Q.F.D.

Pour conclure cette section, nous traitons le cas des strates avec $n \geq 3$ zéros.

Lemme 5.4. *L'application résiduelle des strates $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -k\ell_1, \dots, -k\ell_p; (-k^s))$ avec $p, s \geq 1$ est surjective pour $n \geq 3$.*

Démonstration. La preuve se fait par éclatement de zéros à partir d'une strate de la forme $\Omega^k \mathcal{M}_0(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2; -k\ell_1, \dots, -k\ell_p; (-k^s))$. Dans certains cas, il n'est pas possible d'obtenir une k -différentielle dans une strate en éclatant un zéro d'une k -différentielle primitive. Toutefois, grâce à la multiplicativité des k -résidus (voir l'équation (2.1)) il suffit de vérifier que l'on peut partir d'une strate dont les éléments ne sont pas la puissance k -ième de différentielles abéliennes ou la puissance $\frac{k}{2}$ -ième de différentielles quadratiques. C'est ce qui est démontré dans le lemme 2.9. C.Q.F.D.

6. LES PÔLES SONT D'ORDRE k EN GENRE ZÉRO

Dans les strates ayant un unique zéro, toutes les singularités ont un ordre divisible par k . Elles ne sont donc pas primitives (lemme 2.1). Nous nous concentrerons sur le cas des strates avec deux zéros. Le cas des strates avec plus de zéros se traitera par éclatement. Dans la section 6.1 nous traitons les cas sporadiques du théorème 1.6. Puis nous construisons les

k -différentielles dans la section 6.2 pour le cas $n = 2$ et dans la section 6.3 dans les autres cas.

6.1. Cas sporadiques. Nous prouvons la non-réalisabilité des k -résidus dans les cas sporadiques du théorème 1.6. Nous traitons tout d'abord le cas (1) et les cas des différentielles quartiques puis le cas des différentielles cubiques et sextiques. Les cas quartiques reposent sur le fait que les liens selles relient des entiers de Gauss entre eux, i.e. des éléments du réseau $\mathbf{Z} \oplus i\mathbf{Z}$. Les cas cubiques et sextiques reposent sur le fait que les racines 3-ièmes et 6-ièmes de l'unité engendrent le réseau $\mathbf{Z} \oplus \exp(2i\pi/3)\mathbf{Z}$.

Rappelons les notions géométriques de *coeur* et de *domaine polaire* (voir [Tah18]). Les pôles d'ordre $-k$ ont pour voisinage un demi-cylindre bordé par un ou plusieurs liens selles. Nous appelons *domaine polaire* le demi-cylindre (ouvert) de chacun de ces pôles et *coeur* leur complémentaire dans la surface.

L'obstruction (1). Nous montrons que les k -résidus $(1, (-1)^k)$ n'appartiennent pas à l'image de l'application k -résiduelle $\mathfrak{R}_0^k(-1, 1; -k, -k)$. Si une telle k -différentielle existait, alors la k -différentielle entrelacée obtenue en collant les deux pôles d'ordre $-k$ serait lissable (voir lemme 2.4). La k -différentielle obtenue par lissage serait dans la strate $\Omega^k \mathcal{M}_1(1, -1)$, qui est vide.

L'obstruction (10). Nous montrons que le 4-résidu $(1, 1, 1, 1)$ n'est pas dans l'image de l'application $\mathfrak{R}_0^4(-1, 9; (-4^4))$.

Supposons par l'absurde qu'il existe une 4-différentielle ξ ayant ces invariants locaux. Elle aurait 4 demi-cylindres infinis dont les circonférences seraient dans l'ensemble $\{\pm 1, \pm i\}$. Il y a deux cas à considérer selon que le zéro d'ordre -1 borde un domaine polaire ou non.

Supposons que le zéro d'ordre -1 est au bord d'un domaine polaire. Nous pouvons couper la surface le long du lien selle le plus court entre les deux zéros. On obtient une surface plate à bord avec deux segments v_1 et v_2 au bord. Comme le zéro est d'ordre -1 , l'angle de la singularité correspondante est de $\frac{3\pi}{2}$. Comme le domaine polaire contribue d'un angle π à cette singularité, la surface est obtenue localement en collant au lien selle γ au bord du domaine polaire un quadrilatère de côtés γ , v_1 , γ' et v_2 dont la somme des angles entre γ et les v_i est égale à $\frac{\pi}{2}$. Donc la longueur de γ' est strictement inférieure à 1. La surface plate est obtenue en concaténant entre les extrémités de γ' les segments correspondant aux liens selles des trois pôles d'ordre -4 restant. Comme ces segments appartiennent à $\{\pm 1, \pm i\}$ la somme des segments est dans $\mathbf{Z} \oplus i\mathbf{Z}$, ce qui implique que γ' est nul. Et donc la surface plate est singulière.

Supposons maintenant que le zéro d'ordre -1 ne borde pas de domaine polaire. On peut alors couper la surface le long du lien selle de longueur minimale entre les deux zéros. La surface obtenue est une surface de translation à bord ayant un angle de $\frac{3\pi}{2}$. Le complément des domaines polaires est alors un hexagone. Toutefois il n'est pas possible de construire un hexagone dont quatre segments appartiennent à $\{\pm 1, \pm i\}$ et les deux derniers sont adjacents, de même longueur et forment un angle interne de $\frac{3\pi}{2}$. Cela montre que $\mathfrak{R}_0^4(-1, 9; (-4^4))$ ne contient pas $(1, 1, 1, 1)$.

L'obstruction (8). Dans le cas (8) des 4-résidus $(1, 1, -2)$ dans la strate $\Omega^4 \mathcal{M}_0(-1, 5; (-4^3))$, les circonférences des cylindres demi-infinis sont soit dans $\{\pm 1, \pm i\}$ soit une diagonale du carré dont les arêtes sont de longueur 1. Ce cas se démontre donc de manière complètement similaire au précédent.

Les obstructions (9) et (11). Les 4-résidus sont égaux à 1, respectivement dans les strates $\Omega^4 \mathcal{M}_0(3, 5; (-4^4))$ et $\Omega^4 \mathcal{M}_0(3, 13; (-4^6))$. Nous raisonnons comme dans le cas (10) et nous donnerons les principales différences avec celui-ci.

Supposons qu'il existe une 4-différentielle ξ possédant ces invariants. Découpons ξ le long d'un lien selle reliant les deux singularités coniques pour obtenir une surface de translation de genre zéro avec deux bords γ et γ' tels que $\gamma' = \pm i\gamma$. Cette surface possède un nombre

pair de cylindres demi-infinis de circonférences dans $\{\pm 1, \pm i\}$. Notons que cela implique que les parties réelles et imaginaires de γ sont soit toutes les deux paires, soit toutes les deux impaires. De plus, on en déduit que γ est un élément de $\mathbf{Z} \oplus i\mathbf{Z}$. Les vecteurs d'holonomie des liens selle appartiennent donc au réseau $\mathbf{Z}[i]$. Ceci implique en particulier que les cylindres sont bordés par un unique lien selle, de longueur 1. La somme des angles des deux singularités coniques est égale à 8π dans le cas (9) et à 12π dans le cas (11). On en déduit que le cœur, qui est connexe, est respectivement un hexagone et un octogone. Deux arêtes de ces polygones sont γ et γ' , tandis que les autres sont collées aux cylindres correspondant aux pôles d'ordre -4 .

Dans le cas de la strate $\Omega^4 \mathcal{M}_0(3, 5; (-4^4))$, les angles aux singularités coniques sont $7\pi/2$ et $9\pi/2$. Si γ et γ' sont consécutifs, alors la singularité correspondante est d'angle au plus 2π , ce qui est exclu. S'il existe exactement un pôle entre γ et γ' , alors la singularité bordant les autres cylindres est composée d'un angle de 3π pour les cylindres et au moins π pour les deux angles dans l'hexagone. Elle correspond donc au zéro d'ordre 5. Il reste alors un angle de $\pi/2$ pour les deux angles entre ces cylindres et respectivement γ et γ' . Cela est impossible pour un polygone dont les sommets sont des points entiers du plan. Enfin supposons que γ et γ' séparent les pôles en deux sous-ensembles de cardinal 2. Chaque singularité est composée d'un angle de 2π pour les cylindres et respectivement $3\pi/2$ et $5\pi/2$ dans l'hexagone. Pour les angles participant au zéro d'ordre 3, l'un de ceux-ci se situe entre les deux cylindres. Cet angle ne peut être égal à π car la somme des deux angles restant serait de $\pi/2$. L'angle entre les deux cylindres est donc égal à $\pi/2$ et la somme des deux autres angles est égal à π . On vérifie facilement que cela est également impossible dans un polygone dont les sommets sont entiers.

Maintenant, dans la strate $\Omega^4 \mathcal{M}_0(3, 13; (-4^6))$ les angles des singularités sont respectivement $7\pi/2$ et $17\pi/2$. Nous distinguons les cas selon la répartition des six cylindres entre γ et γ' . La singularité conique d'angle $7\pi/2$ ne peut être adjacente qu'au plus à deux cylindres et doit être adjacente à au moins un cylindre. Les deux répartitions possibles sont donc en sous-ensembles de cardinaux respectifs $(5, 1)$ et $(4, 2)$. Avec la répartition $(5, 1)$, deux angles de l'octogone contribuent au zéro d'ordre 3, pour un angle total de $5\pi/2$. Donc les angles entre l'arête r correspondant au cylindre et les arêtes γ et γ' peuvent être de la forme $(2\pi, \pi/2)$ et $(3\pi/2, \pi)$. Donc modulo translation les arêtes (γ, r, γ') sont de la forme $(-1, 1, i)$ et $(i, 1, 1)$. Dans les deux cas, il est facile de vérifier qu'il faut au moins 7 arêtes dans $\{\pm 1, \pm i\}$ pour connecter les points initial et final de la concaténation (tel que l'octogone est au dessus du vecteur 1). Enfin, avec la répartition $(4, 2)$, la singularité conique d'angle $\frac{7\pi}{2}$ de 2π provenant des cylindres et $3\pi/2$ venant de trois angles de l'octogone. Cela implique que le point initial de γ coïncide avec le point final de γ' . La surface ainsi formée est donc singulière.

Les obstructions (2) et (3). Nous traitons maintenant les cas des strates $\Omega^3 \mathcal{M}_0(-1, 4; (-3^3))$ et $\Omega^3 \mathcal{M}_0(1, 2; (-3^3))$ avec les 3-résidus égaux à $(1, 1, 1)$. Supposons qu'il existe une telle 3-différentielle ξ . Les liens selles de bord des trois domaines polaires sont des racines 3-ième de l'unité. Cela implique qu'ils sont collés sur le cœur de ξ . La somme des angles des singularités coniques de ξ étant 6π , et les angles au bord de chaque domaine polaire étant de π , on en déduit que la géométrie de la surface plate est de deux types possibles. Dans le premier cas, chaque domaine polaire est bordé par un unique lien selle de longueur 1 tandis que le cœur est un pentagone dont deux côtés γ et γ' sont identifiés. Dans le second cas, deux domaines polaires sont bordés par un lien selle de longueur 1 tandis qu'un troisième est bordé par deux liens selles dont la somme des longueurs est 1. Le cœur est alors un quadrilatère dont les arêtes appartiennent aux directions des racines 3-ième de l'unité. Cela implique que le quadrilatère possède deux arêtes consécutives formant un angle de π . La singularité associée à ce sommet est alors d'angle 2π , ce qui est absurde.

Dans le cas où le cœur est un pentagone avec deux arêtes γ, γ' identifiés et trois arêtes correspondant au bord des cylindres. Il y a deux cas à considérer selon que γ et γ' sont consécutifs ou il existe une arête r entre les deux.

Dans le premier cas, l'angle entre γ et γ' inférieur à 2π , ce qui implique que ξ est dans la strate $\Omega^3 \mathcal{M}_0(-1, 4; (-3^3))$. Donc l'angle de cette singularité est $\frac{4\pi}{3}$. Il est alors facile de voir qu'il faut au moins 4 racines 3-ième de l'unité pour relier le point initial de γ au point final de γ' sans créer de points d'intersection.

Nous considérons maintenant le cas où il existe une arête r entre γ et γ' . Dans le cas de la strate $\Omega^3 \mathcal{M}_0(-1, 4; (-3^3))$, la singularité conique d'ordre -1 est d'angle $\frac{4\pi}{3}$ et il s'agit nécessairement de celle située aux deux extrémités de r . La somme des deux angles bordant ce côté dans le pentagone est donc $\frac{4\pi}{3}$. Cela implique que l'angle entre γ et r est nul et donc la surface est singulière. Nous supposons donc que ξ est dans la strate $\Omega^3 \mathcal{M}_0(1, 2; (-3^3))$. Il est facile de vérifier que le zéro d'ordre 1 doit correspondre au bord de r . Supposons que $r = 1$, alors la somme des angles aux sommets au bord de r est $5\pi/3$, ce qui implique que la somme des deux autres arêtes ne peut pas être égale à 1. Donc les arêtes doivent être de la forme $(\gamma, 1, \gamma', \exp(2i\pi/3), \exp(2i\pi/3))$. Cela implique que $\gamma = \exp(-2i\pi/3)$ et $\gamma' = \exp(-i\pi/3)$. Cela donne une surface dégénérée.

L'obstruction (12). Notons que le cas (12) de la strate $\Omega^6 \mathcal{M}_0(-1, 7; (-6^3))$ et des 6-résidus égaux à $(1, 1, 1)$ peut se traiter de manière similaire. En effet, en coupant le complémentaire des domaines polaires le long d'un lien selle, on obtient un pentagone. En notant γ et γ' les arêtes de ce pentagone identifiées par rotation, il y a deux cas à considérer selon que γ et γ' sont consécutives ou qu'il existe une arête entre les deux. Dans le premier cas, il faut au moins quatre racines 6-ième de l'unité pour relier le point initial de γ au point final de γ' . Dans le second cas, la distance entre le point initial de γ et final de γ' serait strictement inférieure à 1. Cela est impossible et on pourra consulter le cas (10) pour plus de détails.

L'obstruction (4). Montrons qu'il n'existe pas de 3-différentielle dans $\Omega^3 \mathcal{M}_0(4, 2; (-3^4))$ dont les 3-résidus sont $(1, 1, -1, -1)$. On montre comme précédemment que le cœur est un hexagone et que les arêtes identifiées par rotation γ, γ' séparent les pôles en deux ensembles de cardinal 2. Considérons les pôles qui contribuent au zéro d'ordre 2. Supposons que les 3-résidus de ces pôles sont égaux à 1. Si les deux racines des 3-résidus sont égales à 1, alors l'hexagone est de la forme $(\gamma = -1, 1, 1, \gamma' = \exp(2i\pi/3), -1, \exp(-i\pi/3))$ et la surface associée est singulière. Dans le cas où les racines sont égales à 1 et $\exp(2i\pi/3)$, la seule façon d'obtenir une surface telle que le point initial de γ et le point final de γ' soient distance supérieure ou égale à 1 (sans auto-intersection) est que $\gamma = \exp(-2i\pi/3)$ et $\gamma' = -1$. Donc la surface associée est singulière. Enfin, il reste à considérer le cas où les deux 3-résidus sont distincts. Dans ce cas, la somme des deux racines est soit nulle, soit égale à $\sqrt{3}$. On déduit facilement de cela qu'il n'est pas possible d'obtenir les invariants souhaités.

L'obstruction (5). Montrons qu'il n'existe pas de 3-différentielle dans $\Omega^3 \mathcal{M}_0(2, 7; (-3^5))$ dont les 3-résidus sont (1^5) ou $((1^4), -1)$. Dans les deux cas, le cœur est un heptagone et il est facile de vérifier que les arêtes identifiées par rotation γ, γ' séparent les pôles en deux ensembles de cardinaux respectifs 2 et 3. De plus, le sous-ensemble de cardinal 2 contribue au zéro d'ordre 2. Supposons que les deux 3-résidus sont égaux. Supposons que les deux racines sont égales entre elles, disons à 1. On peut voir que la somme des autres racines ne possède pas une partie imaginaire nulle. En effet, la seule possibilité est que les racines sont $\exp(2i\pi/3), -1$ et $\exp(-2i\pi/3)$. Comme leur somme est de norme strictement supérieure à 2, on ne peut pas former la 3-différentielle souhaitée. Donc cela implique que $\gamma = 1$ ou $\gamma' = 1$ et donc la surface est dégénérée. Si les deux racines sont distinctes, alors l'argument du cas (4) fonctionne. Si les deux 3-résidus sont distincts, alors les racines sont de la forme 1 et $\exp(i\pi/3)$. Donc $\gamma = \exp(-2i\pi/3)$ et $\gamma' = -1$, ce qui implique que la surface est singulière.

L'obstruction (6). Le fait que les 3-résidus $((1^3), (-1^3))$ et (1^6) ne soient pas réalisés dans la strate $\Omega^3\mathcal{M}_0(2, 10; (-3^6))$ est en tout point similaire aux cas (4) et (5). Nous ne donnerons donc pas les détails de ce cas.

L'obstruction (7). Nous montrons donc que les 3-résidus (1^6) ne sont pas réalisés dans $\Omega^3\mathcal{M}_0(7, 5; (-3^6))$. Le cœur est un octogone dont deux arêtes γ, γ' sont identifiées par rotation. Cela donne une partition des pôles et il est facile de voir que les sous-ensembles sont de cardinaux $(2, 4)$ ou $(3, 3)$. Dans le cas où l'un des sous-ensembles est de cardinal 2, les pôles correspondants contribuent au zéro d'ordre 2. Dans ce cas, on peut montrer qu'il faut au moins 7 autres pôles pour relier le point initial de γ au point final de γ' . On peut donc se concentrer sur le cas où les deux sous-ensembles sont de cardinal 3. Dans ce cas soit les 3 racines des pôles contribuant au zéro d'ordre 2 sont égales à 1, soit 2 sont égales à 1 et une est égale à $\exp(2i\pi/3)$. Dans le premier cas, des considérations similaires à précédemment montrent que la somme des racines des autres pôles est horizontale. On vérifie que cela est impossible (pour cela on notera que -1 n'est pas une racine cubique de l'unité). Dans le dernier cas, la somme des angles que forment le point final de γ et le point initial de γ' avec ces racines doit être de π . Comme le point initial de γ et le point final de γ' doivent être sur le réseau $\mathbf{Z} \oplus \exp(i\pi/3)$, on en déduit que les angles sont $(\pi, 0)$, $(2\pi/3, \pi/3)$, $(\pi/3, 2\pi/3)$ ou $(\pi, 0)$. Dans tous les cas, la surface ainsi formée est singulière.

6.2. Constructions pour $n = 2$. Notons S la surface plate associée à une k -différentielle ξ d'une strate $\Omega^k\mathcal{M}_0(\mu)$ avec $\mu := (a_1, a_2; (-k^s))$ et dont les k -résidus sont (R_1, \dots, R_s) . Nous supposons que les $a_i = kl_i + \bar{a}_i$ vérifient $-k < \bar{a}_1 \leq -k/2 \leq \bar{a}_2 < 0$. Remarquons que la condition $\text{pgcd}(a_1, a_2, k) = 1$ implique que le cas $\bar{a}_1 = \bar{a}_2 = -k/2$ est impossible. De plus, on a l'égalité $l_1 + l_2 + 1 = s$.

Une construction. Nous présentons un procédé de construction de k -différentielle dans $\Omega^k\mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-k^s))$ qui sera très utile. Soit $E = (r_1, \dots, r_s)$ un s -uplet formé de racines k -ième des R_i , on va construire \mathcal{G} un $s + 2$ -gone qui a pour arêtes les r_i et deux vecteurs non nuls v_1, v_2 avec $v_2 = \zeta v_1$ pour une racine k -ième primitive de l'unité α . Les arêtes v_i partitionnent les r_i en deux uplets E_1 et E_2 de cardinaux respectifs $e_i \in \{0, \dots, s\}$. Par définition le polygone \mathcal{G} est la concaténation de $v_1, r_1, \dots, r_{e_1}, v_2, r_{e_1+1}, \dots, r_s$ dans cet ordre (si $e_1 = 0$, alors v_2 suit directement v_1). Enfin nous supposons que le vecteur normal n_{v_1} à v_1 pointant vers l'extérieur de \mathcal{G} est tel que (n_{v_1}, v_1) forme une base directe. Nous supposons que l'un des deux cas suivant est satisfait.

(C1) On a $e_1 = l_1$ et $e_2 = l_2 + 1$ et $\zeta = \exp((k - 2a_1)i\pi/k)$.

(C2) On a $e_1 = l_1 + 1$ et $e_2 = l_2$ et $\zeta = \exp((2a_1 - k)i\pi/k)$.

La *construction (Ci)* désigne le fait de prendre un polygone de type (Ci) et de former une k -différentielle en collant les deux segments v_i par rotation et des demi-cylindres infinis aux segments r_i . On vérifiera facilement que la k -différentielle ainsi obtenue est de type μ et que les k -résidus aux pôles d'ordre $-k$ sont les R_i . Les deux cas sont illustrés par la figure 12, où les segments v_i sont tracés normalement, les r_i sont en segments hachés et les demi-cylindres sont pointillés.

Deux lemmes basiques. En général, un tel polygone \mathcal{G} n'existe pas et les constructions (Ci) ne sont pas possibles. Nous donnons maintenant une condition suffisante (non nécessaire) sur l'existence de \mathcal{G} , ce qui implique l'existence de k -différentielles correspondantes. Nous commençons par le cas où $-k < a_2 < 0$ (en particulier on a $-k/2 \leq a_2 < 0$).

Lemme 6.1. Soit (R_1, \dots, R_s) un s -uplet de nombres complexes non nuls et r_i une racine k -ième de R_i . Si la somme $t := \sum_{i \neq 1} r_i$ satisfait les propriétés suivantes :

- i) $0 < |t| \leq |r_1|$,
- ii) $t \neq -\zeta r_1$ pour toutes les racines k -ième de l'unité ζ ,
- iii) si $s \geq 3$, alors les r_i ne sont pas tous colinéaires pour $i \geq 2$,

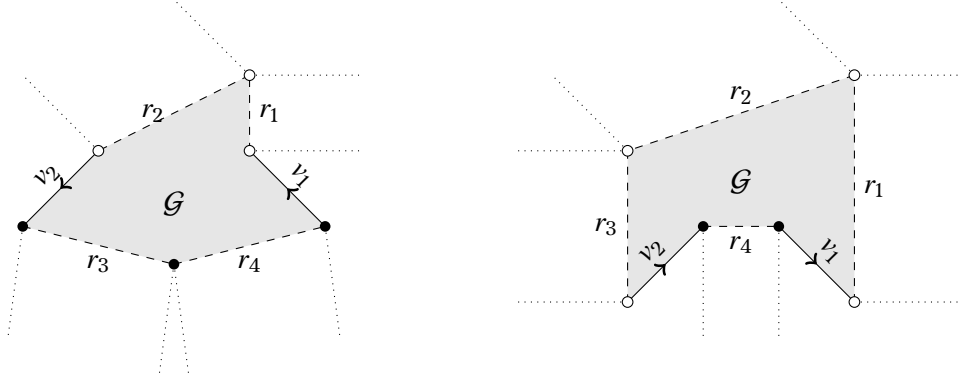


FIGURE 12. Les constructions (C1) à gauche et (C2) à droite sont illustrées dans le cas de la strate $\Omega^4 \mathcal{M}_0(5, 3; (-4^4))$.

alors il existe une k -différentielle dans la strate $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-k^s))$ avec $-k/2 \leq a_2 < 0$ dont les k -résidus sont (R_1, \dots, R_s) .

Démonstration. Considérons des racines r_i de R_i satisfaisants aux conditions du lemme 6.1. Nous construisons un polygone de type (Ci) de la façon suivante. Quitte à multiplier les R_i par un complexe non nul et les r_i par une racine k -ième de l'unité, nous pouvons supposer que $-r_1$ est réel positif et que l'argument de t appartient à $[-\frac{2\pi}{k}, 0[$. Pour $i \geq 2$, prenons les arguments des r_i dans $[-\pi, \pi[$ et rangeons les r_i par argument croissant. Nous construisons un polygone intermédiaire en concaténant les r_i depuis l'origine jusqu'au point final t dans cet ordre. Puis nous relierons les points t à $-r_1$ par deux segments v_1 et v_2 d'égale longueur qui font un angle $\alpha = (a_2 + k)\frac{2\pi}{k}$ (voir la figure 13 pour lequel des deux angles à leur intersection est α). On supposera que v_1 part de t et v_2 termine en $-r_1$. Le segment v_1 peut couper le segment $-r_1$. Toutefois, c'est l'unique intersection qui peut se produire. En effet, si l'argument de t appartient à $]-\frac{2\pi}{k}, 0[$, comme $\alpha \geq \pi$ ni v_1 ni v_2 ne rencontrent d'autres arêtes ou un sommet du polygone. Si l'argument de t est $-\frac{2\pi}{k}$, on obtient la même conclusion en tenant compte du fait que $|t| < |r_1|$.

Si v_1 ne rencontre pas $-r_1$, alors le polygone obtenu est de type (C2) (voir la figure 13 à gauche). Si v_1 coupe $-r_1$, le polygone de type (C1) est obtenu en concaténant v_1 puis r_1 , v_2 et enfin les r_i pour $i \geq 2$ (voir la figure 13 au centre ou à droite). Notons que le point (iii) implique que ce polygone n'est pas dégénéré. Les constructions (Ci) permettent d'obtenir la k -différentielle souhaitée. C.Q.F.D.

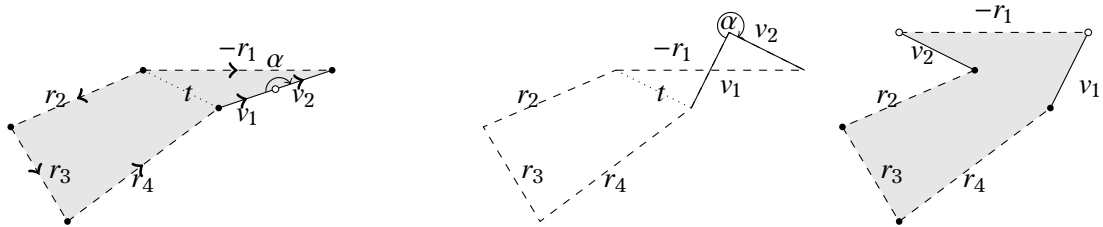


FIGURE 13. La construction du lemme 6.1 lorsque le segment v_1 ne rencontre pas $-r_1$ à gauche et lorsqu'ils s'intersectent au centre et à droite.

La preuve donne un peu plus que le lemme. En effet, on a la remarque suivante.

Remarque 6.2. Avec les mêmes notations que dans la preuve, si l'argument de t est $-\frac{2\pi}{k}$ et si $|t| = |r_1|$, alors la construction que nous donnons dans la preuve fonctionne sauf si $a_2 = -1$.

Nous donnons l'analogie du lemme 6.1 pour les strates dont les zéros sont d'ordres a_i positifs.

Lemme 6.3. Soient $S := \Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-k^s))$ une strate de genre zéro, $(R_1, \dots, R_s) \in (\mathbf{C}^*)^s$ et des racines k -ième r_i de R_i . S'il existe deux sommes $s_1 := \sum_{i \leq l_1} r_i$ et $s_2 := \sum_{i > l_1} r_i$ telles que

i) $0 < |s_1| < q|s_2|$, avec $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ pour $k \geq 4$ et $q = \frac{1}{2}$ pour $k = 3$,

ii) les l_1 premiers r_i ne sont pas tous colinéaires si $l_1 \geq 3$ respectivement,

alors il existe une différentielle dans la strate S telle que les k -résidus sont (R_1, \dots, R_s) .

Démonstration. La preuve de ce lemme est analogue à celle du lemme 6.1. Toutefois, nous utiliserons une variante de la construction (C1) car en général le polygone que nous construirons ne peut pas se représenter sans intersection dans le plan.

Prenons les racines r_i comme dans le lemme. Nous supposons que la somme s_2 des $l_2 + 1$ dernières racines est réelle positive. Quitte à multiplier tous les r_i pour $i \leq l_1$ par une même racine k -ième de l'unité, l'argument de s_1 appartient au segment $[-\frac{\pi}{k}, \frac{\pi}{k}]$. On fait alors la construction (C1) avec les deux vecteurs s_1 et s_2 . Le point (i) implique que polygone ainsi formé est non dégénéré. En effet, dans le cas $k = 3$, le fait que $|s_1| < \frac{1}{2}|s_2|$ et la condition sur l'argument de s_1 implique que la somme $s_1 + s_2$ est d'argument de norme strictement inférieur à celui de $1 + \exp(i\pi/3)$. Comme $v_2 = (s_1 + s_2)/(1 + \exp(i\pi/3))$ on en déduit que la partie imaginaire de v_2 est strictement négative, et donc la non dégénérescence du polygone. La non dégénérescence dans les cas $k \geq 4$ se montre similairement.

On procède alors à la construction suivante. On forme deux polygones constitués respectivement des vecteurs $-s_i$ et des racines r_i qui forment les sommes. On concatène les l_1 premiers r_i , resp. $l_2 + 1$ derniers, par argument croissant en commençant par ceux d'arguments opposés à ceux de s_i puis le vecteur $-s_i$. Le premier polygone est non dégénéré pour $l_1 \geq 3$ par la propriété (ii). Si $l_1 = 2$ et les racines sont proportionnelles, alors le polygone correspondant est dégénéré, mais la construction suivante s'étend à ce cas. Si les $l_2 + 1$ dernières racines sont proportionnelles, alors on peut supposer qu'elle sont toutes dans la même demi-droite partant de l'origine. En effet, sinon on pourrait changer les racines afin d'augmenter la somme s_2 et refaire la construction avec ces nouvelles racines. Si les $l_2 + 1$ dernières racines sont proportionnelles, le polygone est alors dégénéré, mais la construction suivante s'étend sans problèmes. La k -différentielle est alors obtenue en collant ces polygones au polygone initial, des demi-cylindres infinis aux vecteurs r_i et les deux vecteurs v_i ensemble. C.Q.F.D.

Nous voudrions insister sur le fait que les constructions ci-dessus ne sont pas les seules pour obtenir de telles k -différentielles. Toutefois, elles permettent de construire la majorité de celles-ci.

Les constructions. Nous montrons que l'application k -résiduelle est surjective sauf dans les cas sporadiques. Nous traitons les cas avec deux zéros dont un d'ordre négatif, puis avec deux zéros positifs et enfin le cas des strates avec au moins trois zéros.

Nous prouvons maintenant le théorème 1.6 dans le cas des strates où un zéro est d'ordre négatif. Rappelons que ce théorème énonce la surjectivité de l'application résiduelle, sauf dans les cas exceptionnels. La preuve, une récurrence sur le nombre de pôles de la strate, repose sur le lemme 6.1 donnant une condition suffisante pour construire de telles k -différentielles.

Preuve du théorème 1.6, un zéro est d'ordre négatif. Nous traitons tout d'abord le cas où $-k < a_1 < -[\frac{k}{2}]$. Prenons des racines k -ième r_i de R_i satisfaisant aux conditions suivantes. La somme des r_i est non nulle et le \mathbf{R} -espace vectoriel engendré par les r_i est \mathbf{C} . Pour $k \geq 3$ ces deux conditions peuvent être facilement satisfaites simultanément. Nous supposons que les r_i sont ordonnés par argument décroissant. Nous formons un polygone en concaténant

les résidus par argument croissant, puis en reliant le sommet final au sommet initial par deux segments satisfaisant les deux propriétés suivantes. Ils sont de même longueur et l'angle à leur intersection est égal à $(a_1 + k)\frac{2\pi}{k}$. Remarquons que ce polygone est sans point d'auto-intersection. La différentielle est obtenue en collant des demi-cylindres aux arêtes r_i et les deux arêtes spéciales entre elles par rotation.

Nous traitons maintenant le cas plus subtil où $0 > a_2 \geq -\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$. L'application k -résiduelle des strates avec un unique pôle d'ordre $-k$ est trivialement surjective.

Dans le cas de deux pôles d'ordre $-k$, le lemme 6.1 implique sans difficultés que tous les k -résidus qui ne sont pas proportionnels à $(1, (-1)^k)$ sont dans l'image de l'application résiduelle des strates $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2; -k, -k)$. Supposons maintenant que les résidus soient $(1, (-1)^k)$ et que $(a_1, a_2) \neq (1, -1)$. Alors par la remarque 6.2, on peut obtenir une k -différentielle avec ces invariants.

Nous considérons maintenant les cas avec $s \geq 3$ pôles d'ordre $-k$. Nous montrons par récurrence sur s que les hypothèses du lemme 6.1 sont presque toujours vérifiées. Les quelques cas restant seront traités à la main.

Considérons tout d'abord le cas où tous les k -résidus R_i sont de norme 1. Afin d'utiliser le lemme 6.1 il suffit de montrer qu'il existe $s - 1$ racines r_i des R_i telles que la somme appartient au disque ouvert époiné Δ^* . Nous supposons dans un premier temps que si $k = 4, 6$, alors les R_i ne sont pas tous égaux entre eux et que si $k = 3$, alors les 3-résidus R_i ne sont pas égaux ou opposés entre eux. S'il y a $s = 3$ pôles, il suffit de prendre deux racines r_1 et r_2 telles que les arguments r_1 et $-r_2$ sont de différence strictement inférieure à $\frac{\pi}{3}$. Cela est clairement toujours possible sous nos hypothèses. De plus, notons que ces deux racines ne sont pas proportionnelles. Par récurrence on suppose que la somme de $s - 1$ racines est $t_{s-1} \in \Delta_*$ et qu'au moins deux racines ne sont pas proportionnelles. Pour r_s tel que $\langle t_{s-1}, r_s \rangle = \min_{r|r^k=R_s} \{\langle t_{s-1}, r \rangle\}$ il est aisé de vérifier que $t_{s-1} + r_s \in \Delta^*$. On peut donc conclure par le lemme 6.1 à l'existence de k -différentielles avec les invariants souhaités.

Considérons les cas des k -résidus de la forme (1^s) pour $k = 4, 6$ et $((1^{s_1}), (-1^{s_2}))$ pour $k = 3$. Nous construisons une k -différentielle dans $\Omega^k \mathcal{M}_0((s-2)k+1, -1; (-k^s))$ avec ces k -résidus sauf dans les cas sporadiques (2), (10) et (12) du théorème 1.6. Notons que ces strates sont les seules qui ne soient pas vides lorsque $0 > a_2 \geq -\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ et $k \in \{3, 4, 6\}$ (voir lemme 2.1).

Si $k = 3$ et les 3-résidus sont (1^s) , nous construisons le polygone de type (C1) en concaténant $\lfloor \frac{s}{2} \rfloor$ segments $e^{i\pi/3}$ puis $\lceil \frac{s}{2} \rceil$ fois -1 et en joignant le point initial avec le point final par deux segments d'égale longueur faisant un angle de $\frac{2\pi}{3}$ à leur intersection. Pour $s > 3$, cela nous donne un polygone non dégénéré et on conclut par la construction (C1).

Si les 3-résidus sont $((1^{s_1}), (-1^{s_2}))$ on procède de la façon suivante. Dans le cas de la strate $\Omega^3 \mathcal{M}_0(-1, 4; (-3^3))$ et des 3-résidus $(1, 1, -1)$ on utilise la construction (C1) avec les racines -1 , puis $\exp(2i\pi/3)$, puis 1 puis les deux vecteurs v_i . Pour la strate $\Omega^3 \mathcal{M}_0(-1, 7; (-3^4))$ et des 3-résidus $(1, 1, -1, -1)$ on utilise la construction (C1) avec les racines 1 , puis $\exp(i\pi/3)$, puis $\exp(2i\pi/3)$, puis -1 puis les deux vecteurs v_i . Dans les autres cas, on part du polygone de type (C1) du paragraphe précédent construit avec $s_1 + \lfloor \frac{s_2}{2} \rfloor$ segments. Remarquons qu'un triangle équilatéral permet de remplacer un 3-résidu égal à 1 par deux 3-résidus égaux à -1 , voir la figure 14. Cela implique le résultat pour s_2 pair. Si s_2 est impair, on construit le polygone de type (C1) en ajoutant un segment $\exp(-2i\pi/3)$ après les $s_1 + \lfloor \frac{s_2}{2} \rfloor$ segments de la construction précédente.

Dans le cas $k = 4$ nous construisons un polygone de type (C1) comme suit. Si le nombre de pôles s est impair, le uplet E est constitué de $\lfloor s/2 \rfloor$ fois $-i$, du segment 1 et de $\lfloor s/2 \rfloor$ fois i . Comme la différence entre le point initial et final de la concaténation des éléments de E est 1, nous pouvons joindre ces deux points par deux segments de même longueur faisant un angle de $\frac{3\pi}{2}$. Si s est paire, E est constitué de $\frac{s}{2} - 1$ fois $-i$, puis deux fois 1 et enfin $\frac{s}{2} - 1$ fois i . La différence entre le point initial et final est donc le segment 2 et nous joignons ces deux points par deux segments de même longueur faisant un angle de $\frac{3\pi}{2}$. Ce polygone



FIGURE 14. Transformation d'un polygone de type (C1) pour obtenir un élément de $\Omega^3 \mathcal{M}_0(7, -1; (-3^4))$ dont les 3-résidus sont (1^4) en un élément de $\Omega^3 \mathcal{M}_0(10, -1; (-3^5))$ dont les 3-résidus sont $((1^3), (-1^2))$.

ne possède pas de points d'auto-intersection pour $s \geq 5$ et $s = 3$. Ainsi la construction (C1) donne la 4-différentielle désirée.

Enfin il reste à traiter le cas $k = 6$. Si s est pair, E est formé de $\frac{s}{2} - 1$ fois -1 , puis $e^{2i\pi/3}$, puis $e^{i\pi/3}$ et finalement $\frac{s}{2} - 1$ fois 1 . Si s est impaire, E est formé des vecteurs précédents et de $e^{-i\pi/3}$ à la fin. Nous joignons le point initial au point final de la concaténation des éléments de E par deux segments de même longueur et d'angle $\frac{5\pi}{3}$. Ce polygone ne possède pas de points d'auto-intersection pour $s \geq 4$ et on conclut par la construction (C1).

Nous considérons maintenant les cas où les k -résidus n'ont pas tous la même norme. Commençons par le cas $s = 3$. Soit R_1 un k -résidu de plus grande norme. Si $k \neq 3, 4$ et si $(R_2, R_3) \neq (1, -1)$ dans le cas où $k = 5$, alors comme précédemment il existe des racines de R_2 et R_3 dont la somme est de norme strictement comprise entre 0 et $|R_1|$. Dans le cas où $k = 5$ et $(R_2, R_3) = (1, -1)$, alors on considère deux cas. Si $|R_1| \geq 3$, alors il suffit de prendre $r_2 = 1$ et $r_3 = \exp(3i\pi/5)$ car la norme de $r_2 + r_3$ est strictement inférieure à celle de la racine 5-ième de 3 . Si $1 < R_1 < 3$, alors on considère la racine r_1 d'angle dans $]-\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}[$. On vérifie facilement que la norme de $r_1 - 1$ est strictement inférieure à 1 . Cela conclut ce cas spécial et le lemme 6.1 permet alors de conclure dans tous les cas.

Dans le cas où $k = 4$, si $R_2 \neq R_3$, alors la construction du paragraphe précédent fonctionne. Si $R_2 = R_3 = 1$ et $|R_1| > 1$ il y a deux cas à considérer. Si $|R_1| > 4$, alors en prenant $r_2 = 1$ et $r_3 = i$ on peut utiliser le lemme 6.1. Supposons maintenant que $|R_1| \leq 4$. Si les 4-résidus sont distincts de $(1, 1, -4)$ alors nous permutons ces 4-résidus de sorte que R_2 soit le plus grand, avec $R_2 \neq 4$ et $R_1 = R_3 = 1$. Dans ce cas, la somme de racine quatrième de R'_3 et R'_2 se trouve dans Δ^* et le lemme 6.1 permet de conclure. Notons que cette construction ne fonctionne pas dans le cas $(-4, 1, 1)$ car les racines quatrièmes de -4 sont $\pm 1 \pm i$ et celles de 1 sont ± 1 et $\pm i$. De fait, on a montré que ce cas est un cas sporadique du théorème 1.6.

Dans le cas $k = 3$, une analyse similaire fonctionne. Si $R_2 \neq -R_3$, la construction du polygone de type (C1) ne pose aucun problème. Si $R_2 = -R_3 = 1$ et $|R_1| > 1$, alors nous considérons deux cas. Si $|R_1| > 3\sqrt{3}$, alors il existe deux racines troisièmes des 3-résidus R_2 et R_3 telles que la somme est inférieure ou égale à la racine cubique de $|R_1|$ et on peut utiliser le lemme 6.1. Supposons maintenant que $|R_1| \leq 3\sqrt{3}$. Alors on prend la racine r_1 dont l'argument est compris dans le segment $]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}[$. Maintenant on concatène la racine -1 de -1 si l'argument est compris entre $-\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6}$ et $|R_1| < 3\sqrt{3}$. Dans le cas où l'argument est de norme strictement supérieur à $\frac{\pi}{6}$, on concatène la racine $\pm \exp(2i\pi/3)$ de 1 . Dans tous les cas, la somme est dans Δ^* , ce qui permet d'utiliser le lemme 6.1 pour faire la construction de type (C1). Dans le dernier cas où $R_1 = 3i\sqrt{3}$ on concatène 1 , puis $\exp(i\pi/3)$, puis la racine d'argument $5\pi/6$ de R_1 . On utilise alors la construction (C1).

Considérons maintenant par récurrence le cas où $s \geq 4$. Comme précédemment nous considérerons tout d'abord les cas $k \neq 3, 4$. Soient (R_1, \dots, R_{s+1}) des résidus où l'on suppose que la norme de R_1 est maximale et celle de R_{s+1} minimale. Par récurrence, il existe des racines k -ième (non toutes proportionnelles) aux (R_2, \dots, R_s) telles que leur somme t_s est non nulle et de longueur strictement inférieure à $|R_1|^{\frac{1}{k}}$. Nous sommes maintenant ramenés au cas de trois k -résidus (R_1, t_s^k, R_{s+1}) . Ainsi la construction précédente nous donne des racines

qui satisfont aux hypothèses du lemme 6.1. Cela implique la surjectivité de l'application k -résiduelle de ces strates.

Dans le cas $k = 3$, la construction est similaire sauf dans le cas où les 3-résidus sont de la forme $((1^{s_1}), (-1^{s_2}), R_{s+1})$ avec $1 \leq |R_{s+1}| \leq 3\sqrt{3}$. Dans les cas où $s + 1 = 4$ pôles, si $s_1 = 3$ on concatène 2 fois 1 puis $\exp(i\pi/3)$ puis la racine de R_4 avec argument $5\pi/6$. Si $s_1 = 2$ et $s_2 = 1$, alors on concatène 2 fois 1 puis la racine de R_4 avec argument $5\pi/6$ puis -1 . Dans les deux cas on utilise alors la construction (C1). Dans le cas où il y a plus de $s + 1 \geq 5$ pôles, on concatène les vecteurs 1 puis les vecteurs $\exp(i\pi/3)$ puis les vecteurs -1 tel que la partie réelle de la somme de ces vecteurs est égale à $-1/2$. Puis on concatène la racine de R_4 dont l'argument est $3\pi/2$ et on conclut avec la construction (C1).

Dans le cas $k = 4$, pour tous les 4-résidus qui ne sont pas de la forme $(1, \dots, 1, -4)$ la construction du paragraphe précédent se généralise sans problèmes. Supposons maintenant que $R = (1, \dots, 1, -4)$. S'il y a un nombre impair de 1, alors il existe une somme de racines (non toutes proportionnelles) de longueur 1 qui vérifient les hypothèses du lemme 6.1. Si le nombre $s - 1$ de 1 est pair, on considère le polygone de type (C1) associé à E donné par $\frac{s-3}{2}$ fois $-i$, puis 2 fois 1, puis $\frac{s-3}{2}$ fois i et enfin $\sqrt{2}\exp(\frac{3i\pi}{4})$. Ce polygone est non dégénéré et la construction (C1) donne la 4-différentielle souhaitée. C.Q.F.D.

Nous prouvons maintenant le théorème 1.6 dans les cas où les deux zéros sont positifs. Ce théorème énonce la surjectivité de l'application résiduelle, sauf dans des cas sporadiques. La preuve repose sur le lemme 6.3. Dans cette preuve, nous utilisons les notations de ce lemme, en particulier $a_i = kl_i + \bar{a}_i$ avec $-k < \bar{a}_1 < \bar{a}_2 < 0$.

Preuve du théorème 1.6, les deux zéros sont positifs. On considère une strate de la forme $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-k^s))$ et un s -uplet $R := (R_1, \dots, R_s)$ dans $(\mathbf{C}^*)^s$. Nous débutons par les cas où $k \geq 5$. Considérons les $l_2 + 1 \geq 2$ k -résidus de normes maximales, que l'on supposera être (R_{l_1+1}, \dots, R_s) . Nous normalisons les k -résidus de telle sorte que $\min_{i=l_1+1, \dots, s} \{|R_i|\} = 1$. On peut choisir les racines r_i des R_i , telles que la somme des $l_2 + 1$ dernières r_i soit de longueur supérieure à $|1 + \exp(\frac{i\pi}{5})|$ et celle des l_1 premières soit non nulle et inférieure ou égale à 1. Cela se montre facilement par récurrence sur l_1 et l_2 sauf si $k = 5$ et $(R_1, R_2) = (1, -1)$. Dans ce dernier cas, il suffit de prendre $(r_1, r_2) = (1, \exp(3i\pi/5))$. Comme $|1 + \exp(\frac{i\pi}{5})| > \sqrt{2}$ (et $|1 + \exp(\frac{i\pi}{5})|/|1 + \exp(\frac{3i\pi}{5})| > \sqrt{2}$ dans le dernier cas), le lemme 6.3 implique l'existence d'une k -différentielle avec les invariants souhaités.

Nous considérons maintenant le cas $k = 4$. Nous traitons d'abord le cas des strates $\Omega^4 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-4^s))$ où $a_2 = 4l_2 - 1$ avec $l_2 \geq 2$. Supposons que les $l_2 + 1$ derniers résidus sont de norme maximale. Nous normaliserons les 4-résidus de telle sorte que $\min_{i=l_1+1, \dots, s} \{|R_i|\} = 1$. On peut choisir des racines des 4-résidus R_i telles que la somme des $l_2 + 1$ dernières est strictement supérieure à 2 et celle des l_1 premières est inférieure à $\sqrt{2}$. Le lemme 6.3 permet alors de conclure.

On considère maintenant les strates de la forme $\Omega^4 \mathcal{M}_0(4(s-3) + 1, 3; (-4^s))$. Supposons tout d'abord que les 4-résidus ne sont pas de la forme $(1, \dots, 1)$. On supposera que les deux derniers 4-résidus sont de normes maximales et que $|R_{s-1}| = 1 \leq |R_s|$. Si $|R_s|^{1/4} \geq \sqrt{2}$, alors il existe des racines r_{s-1} et r_s dont la somme est strictement supérieure à 2. On peut choisir les racines des autres 4-résidus non toutes proportionnelles entre elles telles que la norme de leur somme est inférieure à $\sqrt{2}$. On applique alors le lemme 6.3 afin d'obtenir une 4-différentielle avec les invariants souhaités. Si $|R_s|^{1/4} < \sqrt{2}$, il y a deux cas à traiter selon qu'il existe une somme des $s - 2$ premières racines des 4-résidus strictement inférieure à 1 ou non. Le premier cas ne pose pas de problème par le lemme 6.3. Si toutes les sommes sont supérieures ou égales à 1, alors on permute le rôle de R_s avec R_1 . On choisit alors des racines des 4-résidus telles que la somme des $s - 2$ premières est inférieure à 1 et celle des deux dernières est supérieure ou égale à $\sqrt{2}$. La possibilité de ce choix se montre par récurrence sur s et le lemme 6.3 nous permet de conclure ce cas.

Dans le cas $k = 4$, il reste à considérer le cas des 4-résidus égaux à $(1, \dots, 1)$. Dans le cas des strates où l_1 est impair et $l_2 = 1$, on utilise la construction (C1) avec les éléments suivants. Le uplet E_1 constitué de $\frac{l_1-1}{2}$ racines égales à $-i$, puis une égale à 1 et $\frac{l_1-1}{2}$ racines égales à i . Le uplet E_2 est constitué de 2 racines égales à -1 . Nous traitons maintenant le cas où l_1 est pair et $l_2 = 1$. Si $l_1 \geq 6$ on peut faire la construction (C2) avec les éléments suivants. Le uplet E_1 est constitué de $\frac{s-4}{2}$ fois i , de 3 fois -1 et de $\frac{s-4}{2}$ fois $-i$. Le uplet E_2 est le uplet (1).

Enfin, nous considérons le cas $k = 3$. Le cas des 3-résidus qui ne sont pas de la forme $(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ se montre de manière similaire au cas $k = 4$. Plus précisément, on considère le cas des strates $\Omega^3 \mathcal{M}_0(a_1, a_2; (-3^s))$ où $a_i = 3l_i + \bar{a}_i$. Supposons que les $l_2 + 1$ derniers résidus sont de norme maximale. Nous normaliserons les 3-résidus de telle sorte que $\min_{i=l_1+1, \dots, l_s} \{|R_i|\} = 1$. Dans ce cas, il existe une somme non nulle de 3-racines r_i pour $i \leq l_1$ de norme inférieure ou égale à $\sqrt{3}$. Le résultat se déduit immédiatement du lemme 6.3 pour $l_2 \geq 3$. Dans le cas $l_2 = 2$, notons qu'il y a un problème seulement si les l_1 premiers 3-résidus sont dans $\{\pm 1\}$ et les racines troisième des $l_2 + 1$ derniers sont de normes strictement inférieures à 2. Dans ce cas, on peut échanger l'un des l_1 premiers 3-résidus avec un des $l_2 + 1$ dernier qui n'est pas dans $\{\pm 1\}$ afin de pouvoir utiliser le lemme 6.3.

Dans le cas des strates avec $l_2 = 1$, on supposera que les deux derniers 3-résidus sont de normes maximales. Si $|R_i|^{1/3} < 1/2$ pour tout $i \leq l_1$, alors on peut appliquer directement le lemme 6.3 afin d'obtenir une 3-différentielle avec les invariants souhaités. Si $|R_{l_1}|^{1/3} \geq 1/2$, il y a deux cas à traiter selon qu'il existe une somme des l_1 premières racines des 3-résidus strictement inférieure à $\sqrt{3}/2$ ou non. Le premier cas ne pose pas de problème par le lemme 6.3. Si toutes les sommes (non nulles) sont de normes supérieures ou égales à $\sqrt{3}/2$, alors on permute le rôle de R_1 avec R_{l_1+1} . La somme des deux dernières racines est alors de norme strictement supérieure à 1. On choisit alors des racines des 3-résidus telles que la somme des l_1 premières est inférieure à $1/2$. La possibilité de ce choix se montre par récurrence sur l_1 et le lemme 6.3 nous permet de conclure ce cas.

Nous considérerons maintenant le cas des s -uplets de la forme $((1^{l_1}), (-1^{l_2}))$. Si $l_2 \geq 3$, alors on peut choisir des racines cubiques des 3-résidus satisfaisant les conditions suivantes. Notons qu'au moins trois 3-résidus sont égaux entre eux, que l'on supposera égaux à 1. On peut donc choisir des racines telles que la somme des $l_2 + 1$ dernières racines est de longueur supérieure à $|3 + \exp(i\pi/3)| > \frac{7}{2}$. On choisit les l_1 premières racines non toutes proportionnelles et de somme de norme 1 ou $\sqrt{3}$. Le lemme 6.3 permet alors de conclure à la surjectivité de l'application 3-résiduelle dans ces cas.

Si $l_2 = 2$, i.e. $a_2 = 5$, alors on peut appliquer le lemme 6.3 s'il existe une somme de l_1 racines de norme 1. En particulier, il suffit de considérer le cas $l_1 \geq 2$. On sait que l'on peut toujours obtenir une somme de longueur 1 ou $\sqrt{3}$, donc on supposera que l'on a choisit des racines dont la somme est de norme $\sqrt{3}$. Si les 3-résidus ne sont pas tous égaux à 1, on peut échanger un 3-résidu de cette somme par son opposé. Avec ces nouveaux 3-résidus on peut clairement obtenir une somme des racines égale à 1.

Considérons maintenant le cas où tous les 3-résidus sont égaux à 1. Si l_1 n'est pas divisible par 3, notons $l_1 = 3l'_1 - t$ avec $t \in \{1, 2\}$. Comme $l_1 \geq 2$, on a $l'_1 \geq 1$ et si $l'_1 = 1$ alors $t = 1$. On fait la construction (C1) avec $E_2 = (-1, -1, -1)$ et E_1 constitué de l'_1 fois $\exp(\frac{-i\pi}{3})$, de l'_1 fois $\exp(\frac{i\pi}{3})$ et enfin de $l'_1 - t$ fois -1 . Soit la concaténation de E_1 est égale à 1, soit à 2. On peut vérifier que le polygone de type (C1) ainsi obtenu est non dégénéré (voir la figure 15 à gauche). Dans le cas où l_1 est divisible par 3 on utilise la construction (C2). On traite tout d'abord le cas $l_1 > 6$. On considère le uplet $E_2 = (-1, -1)$ et le uplet E_1 constitué de $\lfloor \frac{l_1+1}{2} \rfloor$ fois $\exp(\frac{-i\pi}{3})$, puis $\lfloor \frac{l_1+1}{2} \rfloor$ fois $\exp(\frac{i\pi}{3})$ puis -1 si l_1 est pair. La construction (C2) est clairement réalisable. Comme le cas $l_1 = 5$ correspond au cas sporadique (7), il suffit de montrer que (1^9) est réalisable dans $\Omega^3 \mathcal{M}_0(16, 5; (-3^9))$ où $l_1 = 6$. Cela peut s'obtenir en considérant la

concaténation des vecteurs

$$(-1, 1, \exp(2i\pi/3), \exp(2i\pi/3), \exp(-2i\pi/3), \exp(-2i\pi/3), \exp(-2i\pi/3), 1, 1, 1, \exp(2i\pi/3)).$$

On colle alors par rotation le premier vecteur 1 au second vecteur $\exp(2i\pi/3)$, puis on colle les cylindres aux autres segments. La différentielle cubique ainsi réalisée possède les invariants souhaités.

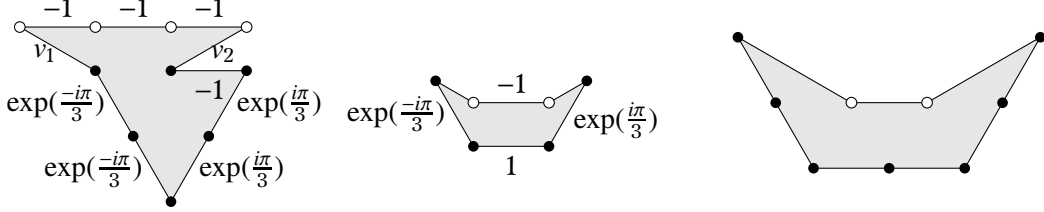


FIGURE 15. Les polygones dans le cas des strates cubiques avec $a_2 = 5$ et l_1 n'est pas divisible par 3 à gauche, avec $a_2 = 2$ et $a_1 = 4$ pour les 3-résidus $(1, 1, 1, -1)$ au centre et avec $a_2 = 2$ et $a_1 = 13$ pour les 3-résidus $((1^5), (-1^2))$ à droite.

Il reste maintenant à considérer le dernier cas où $l_2 = 1$, i.e. $a_2 = 2$. Nous commençons par traiter chacun des cas $l_1 \leq 5$, puis nous traitons le cas $l_1 > 5$.

Pour $l_1 = 1$, i.e. dans la strate $\Omega^3 \mathcal{M}_0(1, 2; (-3^3))$, et les 3-résidus de la forme $(1, 1, -1)$, nous utilisons la construction (C1) avec $E_1 = (1)$ et $E_2 = (-1, -1)$. Le cas $(1, 1, 1)$ correspond au cas sporadique (3).

A présent, supposons que $l_1 = 2$, i.e. la strate $\Omega^3 \mathcal{M}_0(4, 2; (-3^4))$. Si les 3-résidus sont (1^4) , alors on part de la 3-différentielle de $\Omega^3 \mathcal{M}_0(1, 2; (-3^3))$ dont les 3-résidus sont $(1, 1, -1)$. On remplace alors le résidu -1 par deux résidus 1 par la construction de la figure 14. Notons qu'il y a un pôle spécial, dont le domaine est bordé par le zéro d'ordre 2. Nous ne pourrions pas appliquer cette opération à ce pôle sans changer l'ordre du zéro d'ordre 2. Nous supposons par la suite que le 3-résidu de ce pôle est 1. Dans le cas où les 3-résidus sont $((1^3), -1)$, on utilise la construction (C2) avec $E_1 = (\exp(\frac{-i\pi}{3}), 1, \exp(\frac{i\pi}{3}))$ et $E_2 = (-1)$, voir la figure 15 centrale. Enfin le dernier cas $(1, 1, -1, -1)$ correspond au cas sporadique (4).

Les cas avec $l_1 = 3$ et $l_1 = 4$, i.e. des strates $\Omega^3 \mathcal{M}_0(7, 2; (-3^5))$ et $\Omega^3 \mathcal{M}_0(10, 2; (-3^6))$, se traitent en remplaçant un 3-résidu par deux 3-résidus opposés par la construction de la figure 14. On obtient donc que les 3-résidus de la forme $((1^4), -1)$, (1^6) et $((1^3), (-1^3))$ sont dans l'image de l'application 3-résiduelle de ces strates. Enfin, on a montré que les cas restants ne sont pas réalisables et correspondent aux cas (5) et (6) du théorème 1.6.

Enfin considérons le cas $l_1 = 5$, i.e. la strate $\Omega^3 \mathcal{M}_0(13, 2; (-3^7))$. On obtient les 3-résidus distincts de $((1^5), -1, -1)$ via la construction de la figure 14. Montrons qu'il existe une différentielle cubique dont les 3-résidus sont de la forme $((-1^5), 1, 1)$. Cela peut se faire grâce à la construction (C2) avec $E_1 = (\exp(2i\pi/3), \exp(2i\pi/3), -1, -1, \exp(-2i\pi/3), \exp(-2i\pi/3))$ et $E_2 = (1)$, voir la figure 15 de droite.

Comme pour $l_1 = 5$ l'application 3-résiduelle contient les éléments de la forme $((1^4), (-1^2))$ de ces strates. On peut remplacer un 3-résidu égal à 1 (resp. -1) par deux 3-résidus égaux à -1 (resp. 1) via la construction de la figure 14. On en déduit que tous les 3-résidus de la forme $((1^4), (-1^2))$ sont dans l'image de l'application résiduelle pour $l_1 > 5$. C.Q.F.D.

6.3. Constructions pour $n \geq 3$. Il reste à démontrer qu'il n'existe pas d'obstruction pour les strates de k -différentielles de genre zéro avec $k \geq 3$, n'ayant que des pôles d'ordre $-k$ et au moins trois zéros.

D'abord nous traitons le cas $n = 3$ où seulement deux zéros ont un ordre qui n'est pas divisible par k .

Proposition 6.4. *Considérons les strates $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2, kl; (-k^s))$ où $k \geq 3$, $l \in \mathbb{N}^*$ et a_1, a_2 sont premiers avec k . Leurs applications résiduelles sont surjectives.*

Démonstration. Nous allons obtenir les k -différentielles adéquates par scindage de zéro à partir des deux strates $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1 + kl, a_2; (-k^s))$ et $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2 + kl; (-k^s))$. Ces strates sont par définition primitives. Il suffit de vérifier que les deux strates ne sont pas simultanément des strates sporadiques. Remarquons que si $a_1 = a_2$, alors la strate $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_1, kl; (-k^s))$ n'est pas primitive (car $a_1 \in \frac{k}{2}\mathbb{Z}$ dans ce cas). Par conséquent, les deux strates obtenues en regroupant kl avec a_1 ou a_2 sont nécessairement distinctes. Ainsi, les seules strates problématiques sont celles pour lesquelles il existe deux strates sporadiques distinctes avec le même ordre k , le même nombre s de pôles et le même résidu interdit. Les seules paires de strates sporadiques de ce type sont :

- $\Omega^4 \mathcal{M}_0(3, 5, (-4)^4)$ et $\Omega^4 \mathcal{M}_0(-1, 9, (-4)^4)$ avec les résidus de la forme $\mathbb{C}^*(1^4)$;
- $\Omega^3 \mathcal{M}_0(-1, 4, (-3)^3)$ et $\Omega^3 \mathcal{M}_0(1, 2, (-3)^3)$ avec les résidus de la forme $\mathbb{C}^*(1^3)$;
- $\Omega^3 \mathcal{M}_0(2, 10, (-3)^6)$ et $\Omega^3 \mathcal{M}_0(5, 7, (-3)^6)$ avec les résidus de la forme $\mathbb{C}^*(1^6)$.

Par conséquent, les strates problématiques pour lesquelles il est nécessaire de faire les constructions à la main sont :

- $\Omega^4 \mathcal{M}_0(-1, 4, 5, (-4)^4)$ avec les résidus de la forme $\mathbb{C}^*(1^4)$;
- $\Omega^3 \mathcal{M}_0(-1, 1, 3, (-3)^3)$ avec les résidus de la forme $\mathbb{C}^*(1^3)$;
- $\Omega^3 \mathcal{M}_0(2, 3, 7, (-3)^6)$ avec les résidus de la forme $\mathbb{C}^*(1^6)$.

Dans le premier et le deuxième cas, les constructions sont données dans les figures 17 et 18.

Concernant la strate $\Omega^3 \mathcal{M}_0(2, 3, 7, (-3)^6)$, nous utilisons la construction suivante. On part du polygone donné en concaténant 2 fois le vecteur 1, puis le vecteur $\exp(2i\pi/3)$, puis le vecteur $v_1 = \exp(i\pi/3)$, une fois le vecteur $\exp(2i\pi/3)$, le vecteur $w_1 = \frac{-2i\sqrt{3}}{3}$, le vecteur $\exp(2i\pi/3)$, le vecteur $w_2 = \frac{-2\sqrt{3}}{3} \exp(-5i\pi/6)$, le vecteur $\exp(-2i\pi/3)$ et enfin le vecteur $v_2 = \exp(-i\pi/3)$. On identifie v_1 avec v_2 et w_1 avec w_2 par rotation et translation. Puis on ajoute des demi-cylindres infinis aux autres segments. C.Q.F.D.

Ensuite, nous donnons une construction spécifique aux cas où le scindage de zéros nécessite de partir de différentielles non primitives.

Lemme 6.5. *Considérons les strates $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2, a_3; (-k^s))$ où $k \geq 3$. Si $\text{pgcd}(a_1, k) \neq 1$, alors l'application résiduelle de la strate est surjective.*

Démonstration. Grâce à la proposition 6.4, nous pouvons nous contenter de traiter le cas où aucun des a_1, a_2, a_3 n'est un multiple de k . Nous distinguerons deux cas selon si $a_1 > (s-1)k$ ou $a_1 < (s-1)k$.

Si $a_1 < (s-1)k$, alors $a_2 + a_3 > -k$ et la strate $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2 + a_3; (-k^s))$ n'est pas primitive (car toutes les singularités ont pour facteur commun $d = \text{pgcd}(a_1, k)$). Cependant, nous savons qu'elle n'est pas constituée de puissances de 1-formes (car a_1 n'est pas un multiple de k). Ce sont des puissances d -ièmes de m -différentielles où $dm = k$. La proposition 2.6 garantit que l'on peut éclater le zéro d'ordre $a_2 + a_3$ sans modifier les résidus. Pour chaque configuration de k -résidus (R_1, \dots, R_s) , il y a plusieurs m -résidus $(\sqrt[d]{R_1}, \dots, \sqrt[d]{R_s})$ compatibles avec l'équation (2.1). Il est facile de vérifier que tous ne peuvent pas être interdits dans la strate $\Omega^k \mathcal{M}_0(\frac{a_1}{d}, \frac{a_2+a_3}{d}; (-m^s))$. Il suffit pour cela de se référer au cas $n = 2$ (déjà démontré à ce stade) du théorème 1.6 si $m \geq 3$. Si $m = 2$, il faudra se rapporter au théorème 1.9 de [GT21b].

Si $a_1 > (s-1)k$, alors $a_2 + a_3 < -k$. Il s'ensuit que $-k < a_2, a_3 < 0$. Si $\text{pgcd}(a_2, k) \neq 1$, alors le raisonnement qui précède s'applique quitte à remplacer a_1 par a_2 . Nous pouvons donc supposer que $\text{pgcd}(a_2, k) = \text{pgcd}(a_3, k) = 1$. Les strates $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_2, a_1 + a_3; (-k^s))$ et $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_3, a_1 + a_2; (-k^s))$ sont donc primitives. Si pour l'une de ces strates, l'application résiduelle est surjective, alors c'est aussi le cas pour la strate $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2, a_3; (-k^s))$. En effet, comme auparavant, la proposition 2.6 garantit que le scindage de zéro ne modifie pas les

résidus. En revanche, si pour l'une de ces strates l'application résiduelle n'est pas surjective, alors le zéro d'ordre le plus petit dans la strate (a_2 ou a_3 selon le cas) est un pôle simple. On s'en rend compte en consultant le cas $n = 2$ du théorème 1.6. Ainsi, les valeurs problématiques pour a_1, a_2, a_3 sont celles pour lesquelles les deux strates $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_2, a_1 + a_3; (-k^s))$ et $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_3, a_1 + a_2; (-k^s))$ ont des applications résiduelles non surjectives. Ceci implique que $a_2 = a_3 = -1$. Or $a_2 + a_3 < -k$. Ceci contredit $k \geq 3$. C.Q.F.D.

Nous montrons ensuite qu'il n'existe pas d'obstruction pour les strates de k -différentielles de genre zéro avec $k \geq 3$, n'ayant que des pôles d'ordre $-k$ et exactement trois zéros.

Proposition 6.6. *L'application résiduelle de la strate $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2, a_3; (-k^s))$ est surjective pour $k \geq 3$.*

Démonstration. Utilisant la proposition 6.4 et le lemme 6.5, nous pouvons nous restreindre aux strates pour lesquelles chacun des a_1, a_2, a_3 est premier avec k . De plus, k ne peut pas être un nombre pair sans quoi les trois ordres a_1, a_2, a_3 devraient être tous impairs, ce qui est impossible. Nous pouvons donc supposer également que k est impair.

Comme chacun des a_1, a_2, a_3 est premier avec k , en supposant $a_1 \leq a_2 \leq a_3$, la strate $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2 + a_3; (-k^s))$ est nécessairement primitive. Si cette strate n'est pas sporadique, cela démontre que l'application résiduelle de la strate $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2, a_3; (-k^s))$ est surjective. Si l'on se réfère au cas $n = 2$ du théorème 1.6, on constate que les seules strates sporadiques pour lesquelles k est impair sont :

- les strates de la forme $\Omega^k \mathcal{M}_0(-1, 1; -k, -k)$ où les résidus interdits sont les $\mathbb{C}^*(1, -1)$;
- six strates de différentielles cubiques ($k = 3$) pour lesquelles le nombre s de pôles satisfait $3 \leq s \leq 6$.

Supposons d'abord que $s = 2$. Si $\Omega^k \mathcal{M}_0(a_1, a_2 + a_3; (-k^s))$ est une strate sporadique, alors $a_1 = -1$ et $a_2 + a_3 = 1$. Ceci implique que $a_2 = -1$ et $a_3 = 2$. Or, nous pouvons toujours obtenir la k -différentielle voulue par scindage à partir de la strate $\Omega^k \mathcal{M}_0(-2, 2; -k, -k)$ (k étant supposé impair).

Supposons ensuite que $s = 3$. Si $\Omega^3 \mathcal{M}_0(a_1, a_2 + a_3, (-3^3))$ est une strate sporadique, alors $a_1 = -1$ ou $a_1 = 1$. Dans le premier cas, nous avons $a_2 + a_3 = 4$ et donc (a_2, a_3) coïncide avec $(-1, 5)$ ou $(2, 2)$. Dans le second cas, nous avons $a_2 + a_3 = 2$ et donc $a_1 = a_2 = a_3$. Les strates problématiques sont donc $\Omega^3 \mathcal{M}_0(-1, -1, 5, (-3^3))$, $\Omega^3 \mathcal{M}_0(-1, 2, 2, (-3^3))$ et $\Omega^3 \mathcal{M}_0(1, 1, 1, (-3^3))$. Pour la première de ces strates, on peut obtenir la k -différentielle voulue par scindage à partir de la strate $\Omega^3 \mathcal{M}_0(-2, 5; (-3^5))$. Cependant, pour les deux autres, la construction d'une différentielle cubique dont les résidus sont $(1, 1, 1)$ est donnée par les figures 16 et 18.

Supposons maintenant que $s = 4$. Si $\Omega^3 \mathcal{M}_0(a_1, a_2 + a_3, (-3^4))$ est une strate sporadique, alors $a_1 = 2$ et $a_2 + a_3 = 4$. Il s'ensuit que $a_1 = a_2 = a_3 = 2$. La construction d'une différentielle cubique de $\Omega^3 \mathcal{M}_0(2, 2, 5; (-3^4))$ dont les résidus sont $(1, 1, -1, -1)$ est donnée par la figure 16.

Supposons ensuite que $s = 5$. Si $\Omega^3 \mathcal{M}_0(a_1, a_2 + a_3, (-3^5))$ est une strate sporadique, alors $a_1 = 2$ et $a_2 + a_3 = 7$. Il s'ensuit que $a_2 = 2$ et $a_3 = 5$ (car a_2 est premier avec $k = 3$). Nous pouvons obtenir la k -différentielle voulue par scindage à partir de la strate $\Omega^3 \mathcal{M}_0(4, 5; (-3^5))$.

Traisons enfin le cas $s = 6$. Si $\Omega^3 \mathcal{M}_0(a_1, a_2 + a_3, (-3^6))$ est une strate sporadique, celle-ci ne peut pas être $\Omega^3 \mathcal{M}_0(5, 7, (-3^6))$ car $a_2 + a_3 \geq 2a_1$. Donc la strate sporadique est $\Omega^3 \mathcal{M}_0(2, 10, (-3^6))$. Comme les a_1, a_2, a_3 ne sont pas divisibles par 3, il s'ensuit que $a_1 = 2$ et $a_2 = a_3 = 5$. Le résidu $((1^3), (-1^3))$ s'obtient dans la strate $\Omega^3 \mathcal{M}_0(2, 5, 5, (-3^6))$ par scindage depuis la strate $\Omega^3 \mathcal{M}_0(5, 7, (-3^6))$. Enfin, le résidu (1^6) nécessite une construction spécifique donnée. On part de la 3-différentielle de $\Omega^3 \mathcal{M}_0(-1, 2, 2; (-3^3))$ de la figure 18. On ajoute un cylindre de circonférence 1 à la singularité d'ordre 2 en noir et un cylindre de circonférence $\exp(i\pi 3)$ à celle en blanc et enfin on ajoute un cylindre de circonférence $\exp(2i\pi 3)$ à la singularité d'ordre -1 (en rouge).

C.Q.F.D.

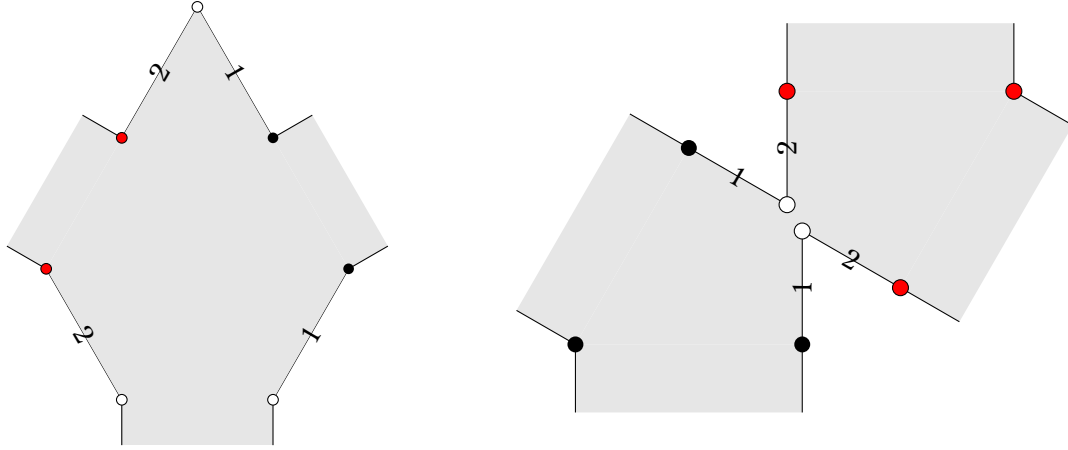


FIGURE 16. À gauche, une différentielle cubique de la strate $\Omega^3\mathcal{M}_0(1, 1, 1; (-3^3))$ de 3-résidus $(1, 1, 1)$. À droite, une différentielle cubique de la strate $\Omega^3\mathcal{M}_0(2, 2, 2; (-3^4))$ de 3-résidus $(1, 1, -1, -1)$.

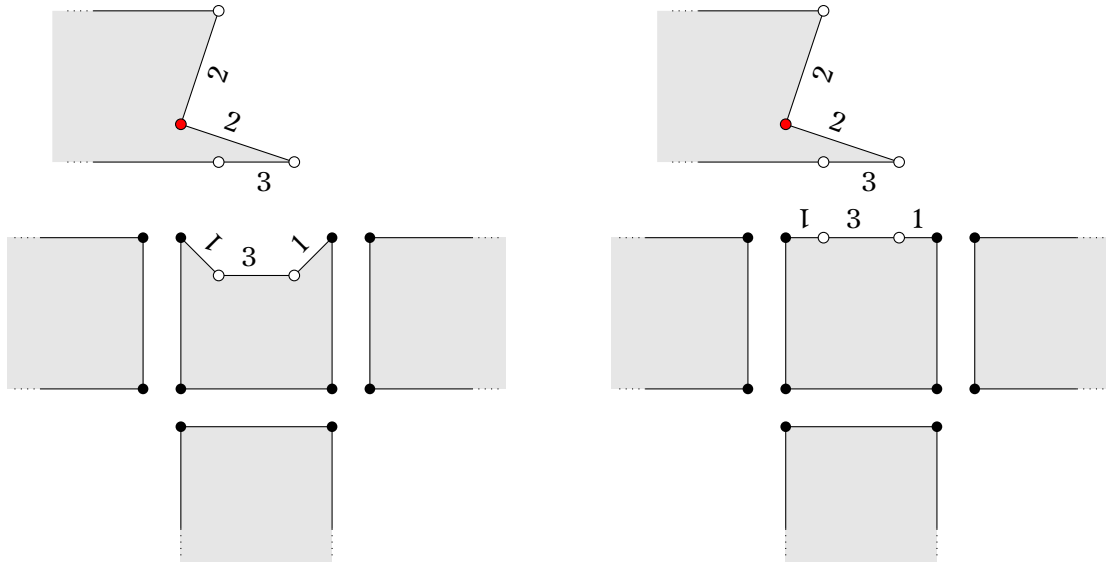


FIGURE 17. Une différentielle quartique de $\Omega^4\mathcal{M}_0(-1, 3, 6; (-4^4))$ à gauche et $\Omega^4\mathcal{M}_0(-1, 4, 5; (-4^4))$ à droite dont les 4-résidus sont $(1, 1, 1, 1)$.

Le théorème 1.6 peut désormais être démontré en toute généralité.

Preuve du théorème 1.6. Lorsque $n = 2$, la caractérisation a déjà été prouvée. La proposition 6.6 établit la surjectivité de l'application k -résiduelle lorsque $n = 3$. Il reste à la démontrer pour $n \geq 4$. La preuve se fait par scindage de zéros à partir du cas $n = 3$.

Le lemme 2.9 garantit que nous pouvons toujours obtenir toute strate avec $n \geq 4$ à partir d'une strate vérifiant $n = 3$ et qui n'est pas constituée par des k -différentielles qui sont des puissances de différentielles abélienne ou quadratiques. L'équation (2.1) établit alors la surjectivité de l'application k -résiduelle des strates avec $n \geq 4$ zéros. C.Q.F.D.

7. k -DIFFÉRENTIELLES EN GENRE SUPÉRIEUR OU ÉGAL À UN

Dans cette section nous montrons que, pour chaque strate de genre $g \geq 1$, l'application k -résiduelle est surjective. Plus précisément, nous prouvons les théorèmes 1.2 et 1.3. Nous considérons dans la section 7.2 les strates ayant au moins un pôle d'ordre strictement

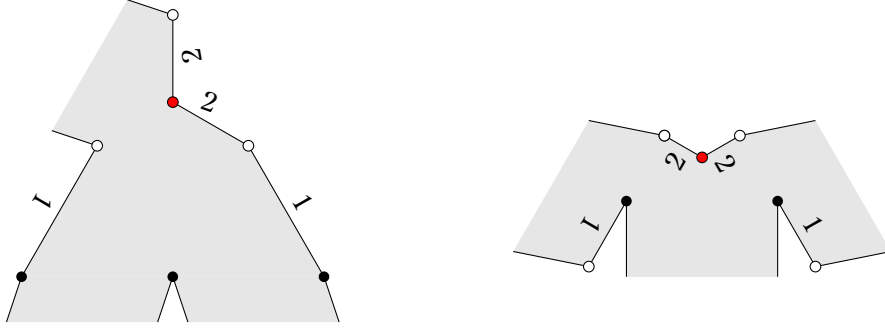


FIGURE 18. Les différentielles cubiques dans les strates $\Omega^3\mathcal{M}_0(-1, 1, 3; (-3^3))$ et $\Omega^3\mathcal{M}_0(-1, 2, 2; (-3^3))$ dont les 3-résidus sont égaux à $(1, 1, 1)$.

inférieur à $-k$. Dans la section 7.3 nous traitons les cas où tous les pôles sont d'ordre $-k$. Enfin, nous traitons le cas des strates sans pôles dans la section 7.4.

7.1. Rappels sur les composantes connexes des strates. La classification complète des composantes des strates de k -différentielles n'est pas connue pour $k \geq 3$. Toutefois, le cas $g = 1$ est bien connu pour tout k et [CG22] ont décrit certaines composantes pour tout $g \geq 2$. Nous rappelons certains éléments sur ce que nous savons sur ces composantes.

En genre un, les composantes connexes des strates sont caractérisées par le nombre de rotation $\text{rot}(S)$ de la surface plate associée à la k -différentielle ξ . Une discussion détaillée est donnée dans la section 2.4 de [CG22]. Pour une surface plate S définie par une k -différentielle de $\Omega^k\mathcal{M}_1(a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p)$ avec une base symplectique de lacets lisses de l'homologie (α, β) le nombre de rotation est

$$\text{rot}(S) := \text{pgcd}(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_p, \text{Ind}(\alpha), \text{Ind}(\beta)),$$

où $\text{Ind}(\alpha)$ est l'indice de l'application de Gauss du lacet α . Notons que l'indice est égal au nombre de $\frac{1}{k}$ -tours effectués par le vecteur tangent à α . On a alors plus précisément le résultat suivant.

- i) Si $n = p = 1$, la strate est $\Omega^k\mathcal{M}_1(a; -a)$ avec $a \geq 2$ et chaque composante connexe correspond à un nombre de rotation qui est un diviseur strict de a .
- ii) Sinon, il existe une composante connexe correspondant à chaque nombre de rotation qui est un diviseur de $\text{pgcd}(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_p)$.

La composante de $\Omega^k\mathcal{M}_1(\mu)$ associée au nombre de rotation $\text{rot} = \rho$ est notée $\Omega^k\mathcal{M}_1^\rho(\mu)$. La restriction de l'application résiduelle $\mathfrak{R}_1^k(\mu)$ à cette composante est notée $\mathfrak{R}_1^{k,\rho}(\mu)$.

Le nombre de rotation peut être calculé de manière algébrique : voir la proposition 3.13 de [CG22]. De ce fait, on déduit directement le résultat suivant.

Lemme 7.1. *Une composante $\Omega^k\mathcal{M}_1^\rho(\mu)$ paramètre des k -différentielles primitives si et seulement si ρ est premier avec k .*

Le résultat suivant s'obtient sans difficultés en utilisant l'opération d'éclater un zéro d'une différentielle décrite dans la proposition 2.6.

Lemme 7.2. *Le nombre de rotation d'une différentielle ξ' obtenue en éclatant un zéro d'une différentielle de nombre de rotation ρ est égal à ρ modulo les ordres des nouveaux zéros.*

Le cas des strates de genre $g \geq 2$ n'est pas connu. Toutefois, [CG22] décrit deux types de composantes. Tout d'abord les composantes hyperelliptiques sont décrites explicitement. De plus, pour les k impairs il existe des composantes dont la parité du revêtement canonique diffère. Toutes ces composantes peuvent être obtenue en cousant une anse d'une k -différentielle de genre inférieur et en éclatant un zéro.

7.2. *k*-différentielles avec un pôle d'ordre strictement inférieur à $-k$. Dans cette section, nous considérons les strates avec au moins un pôle d'ordre strictement inférieur à $-k$. Nous montrons tout d'abord que l'application *k*-résiduelle est surjective pour les strates de genre un possédant un unique zéro. Nous en déduisons la surjectivité de l'application *k*-résiduelle dans le cas général par éclatement de zéro et couture d'anse.

Lemme 7.3. *L'application k-résiduelle de $\Omega^3 \mathcal{M}_1^1(6; -6)$ est \mathbf{C}^* et celle des composantes de la forme $\Omega^k \mathcal{M}_1^\rho(m; -m)$ est surjective pour les couples (k, m) tels que $m > k \geq 3$.*

Démonstration. Si $k \nmid m$, la surjectivité de l'application résiduelle de $\Omega^k \mathcal{M}_1^\rho(m; -m)$ est équivalent au fait que la composante soit non vide. Ceci est une conséquence élémentaire du théorème d'Abel. À partir de maintenant, nous supposons que $k \mid m$.

Par le lemme 7.1, les composantes $\Omega^k \mathcal{M}_1^\rho(\ell k, -\ell k)$ avec $\ell \geq 2$ sont primitives si et seulement si ρ est un diviseur de ℓ premier avec k .

Une *k*-différentielle dans $\Omega^k \mathcal{M}_1^\rho(2k, -2k)$ dont le résidu est non nul est donnée par le recollement de la *k*-partie polaire non triviale de type $k\ell$ associée aux vecteurs $(\emptyset; v_1, \dots, v_4)$ représentés sur la figure 19. Le cas des composantes $\Omega^k \mathcal{M}_1^\rho(\ell k, -\ell k)$ avec $\ell \geq 2$ sont obtenus

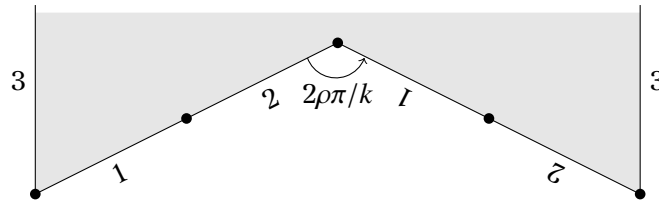


FIGURE 19. Une *k*-différentielle de $\Omega^k \mathcal{M}_1(2k; -2k)$ (en blanc) et $\Omega^k \mathcal{M}_1(k; -k)$ (en gris).

de la façon suivante. Si $\rho < k$, alors on coupe la *k*-différentielle de la figure 19 le long d'une demi-droite commençant au sommet en bas à droite puis on y colle cycliquement $\ell - 2$ plans. Si $\rho > k$, alors on part d'une *k*-différentielle avec un nombre de rotation $0 < \rho' = \rho - rk < k$. On coupe le long d'une demi-droite qui part du sommet d'angle $2\rho'\pi/k$ et on colle cycliquement r plans. Les autres plans sont collés comme précédemment.

Nous traitons maintenant le cas où le *k*-résidu au pôle est nul. Si $k \geq 3$ et $\rho < k$, alors la *k*-différentielle à gauche de la figure 20 appartient à la composante $\Omega^k \mathcal{M}_1^\rho(2k; -2k)$ et possède un *k*-résidu nul, sauf pour la composante $\Omega^3 \mathcal{M}_1^1(6; -6)$. Plus généralement, une *k*-différentielle de $\Omega^k \mathcal{M}_1^\rho(\ell k, -\ell k)$ dont le *k*-résidu est nul est donnée par le recollement d'une *k*-partie polaire triviale de type $k\ell$ associée à $(v_1, v_2; v_3, v_4)$ où les v_i est représentée sur la figure 20.

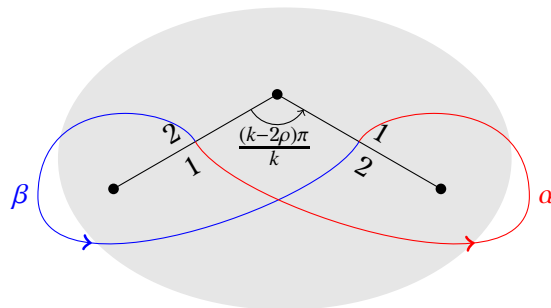


FIGURE 20. Une *k*-différentielle sans *k*-résidu dans $\Omega^k \mathcal{M}_1(2k; -2k)$.

Dans le cas où $\rho > k$, on colle, comme dans le cas du résidu non nul, le nombre de $\frac{1}{k}$ -plans souhaité pour obtenir le nombre de rotation ρ . Notons que dans le cas où $\rho = 1$ et

$\Omega^3 \mathcal{M}_1^1(3\alpha; -\alpha)$, on ne peut pas obtenir que les nombres de rotations de α et β soient 1. En revanche on peut obtenir que ces nombres de rotations soient premiers avec αk . Donc le nombre de rotation de la composante est égal à 1, comme souhaité.

Enfin il reste à montrer que l'application de la résiduelle de $\Omega^3 \mathcal{M}_1^1(6; -6)$ ne contient pas le 0. On sait par le théorème 1.2 de [CG22] que la strate $\Omega^3 \mathcal{M}_2(6)$ est connexe. Or on peut obtenir une différentielle cubique entrelacée en attachant au cube d'une différentielle abélienne de $\Omega \mathcal{M}_1(0)$ une différentielle cubique de $\Omega^3 \mathcal{M}_1^\rho(6; -6)$ dont le 3-résidu est nul. La parité des différentielles cubiques obtenues en lissant ces différentielles entrelacées serait différente selon que $\rho = 1$ ou $\rho = 2$. On obtiendrait donc deux composantes connexes, ce qui est absurde. C.Q.F.D.

Nous traitons maintenant le cas des composantes en genre un avec un unique zéro et au moins deux pôles.

Lemme 7.4. *Soit $\mu = (a; -b_1, \dots, -b_p; -c_1, \dots, -c_r; (-k^s))$ une partition de 0 telle que $(p, r) \neq (0, 0)$ et $p + r + s \geq 2$. L'application résiduelle à chaque composante connexe de $\mathcal{R}_1^k(\mu)$ est surjective.*

Démonstration. Nous commençons par le cas où $r \geq 2$. L'application résiduelle de la strate $\Omega \mathcal{M}_0(a - 2k; -b_1, \dots, -b_p; -c_1, \dots, -c_r; (-k^s))$ est surjective. En effet, le lemme 3.2, combiné avec l'équation (2.1) dans le cas où la strate est non primitive, donne le résultat. On obtient donc la surjectivité de l'application k -résiduelle de la composante $\Omega^k \mathcal{M}_1^\rho(\mu)$ par couture d'anse sauf éventuellement dans le cas $k = 3$, $a = 6$ et $\rho = 1$. Toutefois, le fait que $r \geq 2$ implique qu'il n'existe pas de tels cas.

Supposons maintenant qu'il existe un unique pôle d'ordre non divisible par k . Le lemme 3.2, encore combinée avec l'équation (2.1) dans les cas non primitifs, appliqué à une différentielle de $\Omega \mathcal{M}_0(a - 2k; -b_1, \dots, -b_p; -c; (-k^s))$ implique par couture d'anse que $C^p \setminus \{0\}$ est contenu dans l'image des applications résiduelles des strates $\Omega^k \mathcal{M}_1^\rho(\mu)$. Il suffit donc de prouver que l'origine est dans l'image de ces applications résiduelles. En particulier, ces strates ne possèdent pas de pôles d'ordre $-k$. Notons que le lemme 7.1 implique que les composantes primitives sont de nombre de rotation ρ qui est un diviseur de c premier avec k . Nous associons aux pôles d'ordre $-k\ell_i$ les k -parties polaires triviales d'ordres $k\ell_i$ associées à $(1; 1)$. Pour le pôle d'ordre $-c$, nous prenons une k -différentielle de $\Omega^k \mathcal{M}_1(c; -c)$ avec un lien selle de période 1 satisfaisant la propriété suivante. Le générateur de l'homologie qui n'intersecte pas le lien selle de période 1 est d'indice ρ et l'autre générateur est telle que la somme des $k(\ell_i - 1)$ avec son indice est divisible par ρ . Nous obtenons une surface plate à bord en la coupant le long de ce lien selle. La k -différentielle désirée est obtenue en collant les bords des fentes de manière cyclique. Cette construction donne une k -différentielle dans la composante souhaitée.

Il nous reste à traiter le cas où tous les pôles sont d'ordres divisibles par k . Nous commençons par construire une k -différentielle dans $\Omega^k \mathcal{M}_1(a; -k\ell_1, \dots, -k\ell_p)$ dont tous les k -résidus sont nuls. Partons de la k -différentielle de $\Omega^k \mathcal{M}_1(k\ell_1; -k\ell_1)$ sans résidu donnée par le lemme 7.3. On peut alors couper cette surface le long d'un lien selle dont la période sera notée v . Par exemple, on coupe les k -différentielles de la figure 20 le long du lien selle dénoté par 1. Pour tous les autres pôles on prend une k -partie polaire triviale d'ordre $k\ell_i$ associée à $(v; v)$. La surface obtenue en recollant les segments de manière cyclique (voir la figure 21) a les propriétés désirées. On vérifie sans difficultés que tous les nombres de rotation peuvent être obtenus de par cette construction.

Nous traitons maintenant les strates $\Omega^k \mathcal{M}_1(a; -k\ell_1, \dots, -k\ell_p; (-k^s))$, telles que $s \neq 0$ ou $s = 0$ et au moins un k -résidu non nul. Nous supposons que s'il existe un pôle avec un k -résidu nul, alors le k -résidu de P_1 est nul. Considérons les pôles P_i avec $2 \leq i \leq p'$ qui possèdent un k -résidu R_i non nul. Nous associons à P_i la k -partie polaire non triviale d'ordre $k\ell_i$ associée à $(r_i; \emptyset)$ où r_i est une racine k -ième de R_i de partie réelle positive (ou de partie

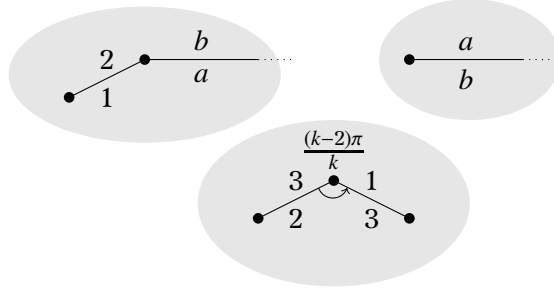


FIGURE 21. Une k -différentielle de $\Omega^k \mathcal{M}_1(5k; -2k, -3k)$ avec un résidu nul.

imaginaire positive si la partie réelle est nulle). Considérons maintenant les pôles P_j avec $j > p'$ ayant un k -résidu nul. Nous associons la k -partie polaire triviale d'ordre $k\ell_j$ associée à $(r_{i_j}; r_{i_j})$ pour un k -résidu $R_{i_j} \neq 0$. Puis nous collons le segment r_i du domaine positif de P_i au segment r_{i_j} du domaine basique négatif de P_j .

Enfin, pour le pôle P_1 nous procédons à la construction suivante. Notons que la somme des r_i est non nulle. Nous supposons que les r_i sont ordonnés par argument croissant. Nous prenons pour P_1 la k -partie polaire de type $k\ell_1$ associée à $(v_1, v_1, v_2, v_2; r_2, \dots, r_{p'})$ où les v_i sont donnés comme suit. Les v_i sont de même longueur, vérifient l'égalité $r_1 = 2v_1 + 2v_2 - \sum_{i \geq 2} r_i$. Enfin l'angle α (au dessus) du point d'incidence de v_1 et v_2 est choisi tel que les lacets joignant le milieu des v_i entre eux est égal au nombre de rotation ρ .

La k -différentielle est obtenue en identifiant par translation les bords r_i des domaines polaires positifs aux segments r_i de la k -partie polaire négative de P_1 . Enfin, nous identifions par rotation d'angle $\frac{2\pi}{k}$ et translation, le premier v_1 au premier v_2 et le second v_1 au second v_2 . Cela donne une k -différentielle primitive avec les invariants souhaités. Un exemple est donné dans la figure 22. C.Q.F.D.

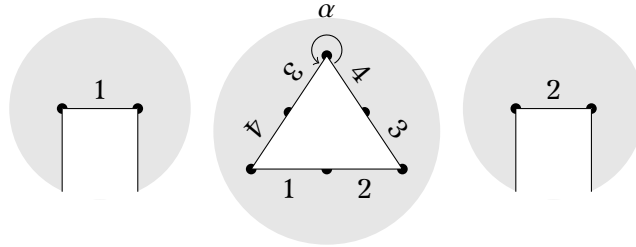


FIGURE 22. Une k -différentielle dans $\Omega^k \mathcal{M}_1(6k; (-2k^3))$ dont les k -résidus sont $(0, 1, 1)$.

Nous traitons maintenant le cas du genre un avec $n \geq 2$ zéros.

Lemme 7.5. Soit $\mu = (a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p; -c_1, \dots, -c_r; (-k^s))$ une partition de 0 telle que $n \geq 2$. L'application k -résiduelle des composantes $\Omega^k \mathcal{M}_1(\mu)$ avec de chaque est surjective.

Démonstration. On commence par traité deux cas spéciaux. Nous montrons que l'origine est dans l'image de l'application k -résiduelle des composantes $\Omega^3 \mathcal{M}_1^1(-2, 8; -6)$ et $\Omega^3 \mathcal{M}_1^1(2, 4; -6)$. Des différentielles cubiques possédant ces invariants sont représentées dans la figure 23. Dans les surfaces plates représentées sur cette figure, les segments du même nom sont identifiés par des rotations d'angle $\pm \frac{2\pi}{3}$. On en déduit que dans les deux cas les indices des chemins α et β sont égaux à ± 1 .

Dans tous les autres cas le résultat s'obtient de la façon suivante. On se donne une k -différentielle associée à la partition $\mu = (a; -b_1, \dots, -b_p; -c_1, \dots, -c_r; (-k^s))$, de nombre de rotation ρ et de résidu souhaité. Les lemmes 7.3 et 7.4 assurent l'existence d'une telle

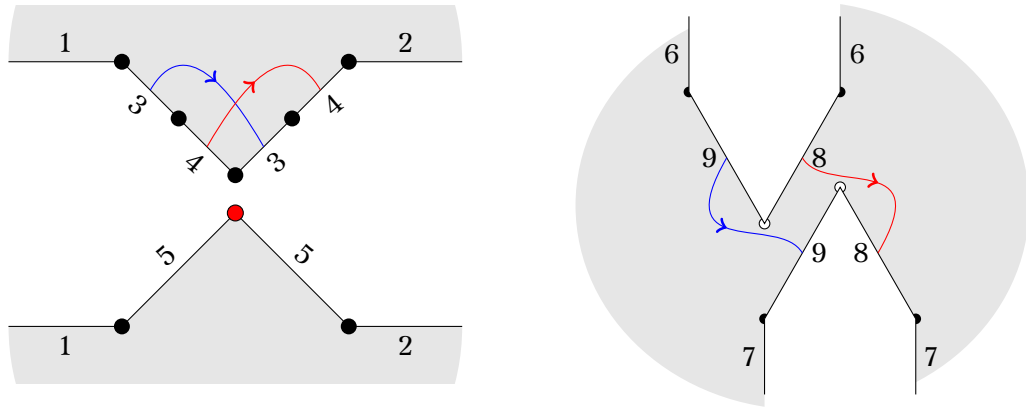


FIGURE 23. Une 3-différentielle dans $\Omega^3 \mathcal{M}_1(-2, 8; -6)$ à gauche et dans $\Omega^3 \mathcal{M}_1(2, 4; -6)$ de résidu nul et de nombre de rotation 1.

k -différentielle. On éclate alors le zéro de la k -différentielle pour obtenir la k -différentielle souhaitée. C.Q.F.D.

Nous terminons par le cas des composantes en genre $g \geq 2$.

Lemme 7.6. *Étant donné $g \geq 2$. L'application k -résiduelle des composantes paires et impaires de $\Omega^k \mathcal{M}_g(\mu)$ est surjective. L'application k -résiduelle des composantes hyperelliptiques est surjective si μ possède un unique pôle et est $(R, (-1)^k R)$ avec $R \in \mathbf{C}$ s'il y a deux pôles.*

Démonstration. Supposons que μ possède un unique zéro. Toutes les composantes paires et impaires non hyperelliptiques s'obtiennent par couture d'anses à partir des k -différentielles de genre un ayant un unique zéro (voir la proposition 2.7) et un nombre de rotation égal à 1 ou 2. La surjectivité de l'application k -résiduelle est une conséquence de la surjectivité des applications k -résiduelles de ces strates (voir lemme 7.3 et 7.4) sauf dans les cas $\Omega^3 \mathcal{M}_g(6 + 6g; -6)$ obtenus à partir de la composante de nombre de rotation 1. Toutefois, le fait que la parité est additive (voir le lemme 5.7 de [CG22]) implique le résultat en collant une anse de nombre de rotation 1 ou 2 à une différentielle cubique de $\Omega^3 \mathcal{M}_1^2(6; -6)$. Les composantes hyperelliptiques s'obtiennent par éclatement à partir de la puissance k -ième d'une différentielle abélienne. On déduit facilement le résultat du théorème 1.1 de [GT21a].

Considérons les strates $\Omega^k \mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n; -c_i; -b_j; (-k^s))$ avec $n \geq 2$ zéros. La surjectivité de l'application k -résiduelle est obtenue en éclatant l'unique zéro des k -différentielles des composantes paires, impaires et hyperelliptiques de $\Omega^k \mathcal{M}_g(\sum a_i; -c_i; -b_j; (-k^s))$ (voir proposition 2.6). C.Q.F.D.

7.3. k -différentielles dont tous les pôles sont d'ordre $-k$. Dans cette section, nous considérons les strates de k -différentielles dans $\Omega^k \mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n; (-k^s))$. Notons que dans ce cas, les strates primitives de genre un sont connexes et seules des composantes hyperelliptiques sont connues en genre $g \geq 2$. Nous commençons par traiter le cas des strates de genre un avec un unique zéro. Nous montrons dans le lemme 7.7 que l'application k -résiduelle contient tous les k -résidus. Les strates générales sont traitées dans le lemme 7.8.

Lemme 7.7. *L'application k -résiduelle de $\Omega^k \mathcal{M}_1(k; (-k^s))$ est surjective.*

Démonstration. La figure 19 montre que les strates $\Omega^k \mathcal{M}_1(k; -k)$ sont non vides. Nous supposons donc que les strates ont $s \geq 2$ pôles d'ordre $-k$. Par hypothèse, il existe des racines k -ième r_i des R_i qui génèrent \mathbf{C} comme \mathbf{R} -espace vectoriel. Sans perte de généralité, on peut

supposer que l'argument de chaque r_i est dans $]-\pi, 0]$. Nous concaténons alors les r_i par argument croissant. L'intérieur de ce segment brisé se trouve dans le demi-plan supérieur ouvert déterminé par la droite (DE) où D et E sont respectivement les points initial et final de la concaténation. Nous joignons D à E par quatre segments v_i d'égale longueur de la façon suivante. Le segment brisé est formé en concaténant les v_i par i croissant avec $v_1 = v_2$, $v_3 = v_4$ et l'angle en au dessus de l'intersection entre v_2 et v_3 est égal à $\frac{2\pi}{k}$. Notons que ce segment brisé se trouve dans le demi plan inférieur à la droite (DE) .

Nous collons maintenant des demi-cylindres infinis aux segments r_i de ce polygone. La surface plate est obtenue en collant v_1 à v_3 et v_2 à v_4 par translation et rotation. On vérifie facilement que cette k -différentielle possède un unique zéro. De plus, la différentielle associée est primitive de genre un car on la déconnecte en coupant les courbes correspondant aux v_i et une autre courbe fermée quelconque. C.Q.F.D.

Lemme 7.8. *L'application k -résiduelle des strates $\Omega^k \mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n; (-k^s))$ est surjective, sauf dans le cas hyperelliptique avec deux pôles où l'image est $\{(R, (-1)^k R)\}$ avec $R \in \mathbb{C}^*$.*

Démonstration. Si la composante est non hyperelliptique, alors elle s'obtient par éclatement de zéros et couture d'anse (cf propositions 2.6 et 2.7) à partir d'une k -différentielle primitive. Le lemme 7.7 donne la surjection. Dans le cas hyperelliptique le résultat est clair. C.Q.F.D.

7.4. k -différentielles d'aire finie. Nous terminons par la preuve du théorème 1.3. Ce résultat dit que les strates primitives $\Omega^k \mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n)$ en genre $g \geq 1$ sont vides si et seulement si $\mu = \emptyset$ ou $\mu = (1, -1)$ en genre un. Toutes les k -différentielles de type (\emptyset) sont la puissance k -ième d'une différentielle de $\Omega \mathcal{M}_1(\emptyset)$. De plus, le théorème d'Abel implique que les strates $\Omega^k \mathcal{M}_1(1, -1)$ sont vides. Notre but est donc de montrer que toutes les autres strates sont non vides.

En genre un, il existe des k -différentielles de type μ pour tout $\mu \neq (1, -1)$. Supposons que $\mu := (a_1, \dots, a_n) \neq \emptyset$, il reste à montrer que certaines d'entre elles sont primitives. Étant donné un tore X , il existe un diviseur $D := \sum a_i z_i$ sur X linéairement équivalent à zéro tel que pour tout diviseur d des a_i , le diviseur $\sum \frac{a_i}{d} z_i$ n'est pas linéairement équivalent à zéro. La k -différentielle ayant pour diviseur D est donc primitive.

Soit $\Omega^k \mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n)$ une strate de genre $g \geq 2$ avec $a_i > -k$. Par le cas de genre un, la strate $\Omega^k \mathcal{M}_1(a_1, \dots, a_n; ((-2k)^{g-1}))$ contient une différentielle primitive (X_0, ω_0) dont tous les k -résidus sont nuls. On obtient une k -différentielle entrelacée en collant la puissance k -ième d'une 1-forme holomorphe sur un tore aux pôles de X_0 . Cette k -différentielle entrelacée est lissable par le lemme 2.5. Les lissages sont clairement des k -différentielles primitives. Donc ces strates sont non vides.

RÉFÉRENCES

- [Bai+19] Matt BAINBRIDGE, Dawei CHEN, Quentin GENDRON, Samuel GRUSHEVSKY et Martin MÖLLER. *Strata of k -differentials*. *Algebr. Geom.* 6.2 (2019), p. 196-233.
- [CG22] Dawei CHEN et Quentin GENDRON. *Towards a classification of connected components of the strata of k -differentials*. *Doc. Math.* 27 (2022), p. 1031-1100.
- [GT21a] Quentin GENDRON et Guillaume TAHAR. *Différentielles abéliennes à singularités prescrites*. *Journal de l'École polytechnique — Mathématiques* 8 (2021), p. 1397-1428.
- [GT21b] Quentin GENDRON et Guillaume TAHAR. *Quadratic differentials with prescribed singularities*. 2021. arXiv : 2111.12653.
- [HS21] David HOLMES et Johannes SCHMITT. *Infinitesimal structure of the pluricanonical double ramification locus*. *Compos. Math.* 157.10 (2021), p. 2280-2337.
- [MZ08] Howard MASUR et Anton ZORICH. *Multiple saddle connections on flat surfaces and the principal boundry of the moduli spaces of quadratic differentials*. *Geom. Funct. Anal.* 18.3 (2008), p. 919-987.

- [RS21] Felix RÖHRLE et Johannes SCHWAB. *Realizability of tropical pluri-canonical divisors*. 2021. arXiv : 2109.03579.
- [Sai10] Henri Paul de SAINT-GERVAIS. *Uniformisation des surfaces de Riemann*. ENS Éditions, Lyon, 2010, p. 544.
- [Tah18] Guillaume TAHAR. *Counting saddle connections in flat surfaces with poles of higher order*. *Geom. Dedicata* 196.1 (2018), p. 145-186.
- [Tro86] Marc TROYANOV. *Les surfaces euclidiennes à singularités coniques*. *Enseign. Math.* (2) 32 (1986), p. 79-94.

(Quentin Gendron) INSTITUTO DE MATEMÁTICAS DE LA UNAM CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, 04510, MÉXICO
Email address: quentin.gendron@im.unam.mx

(Guillaume Tahar) FACULTY OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE, WEIZMANN INSTITUTE OF SCIENCE, REHOVOT,
7610001, ISRAEL
Email address: tahar.guillaume@weizmann.ac.il