

DIFFÉRENTIELLES ABÉLIENNES À SINGULARITÉS PRESCRITES

QUENTIN GENDRON AND GUILLAUME TAHAR

ABSTRACT. The local invariants of a meromorphic abelian differential on a Riemann surface of genus g are the orders of zeros and poles, and the residues at the poles. The main result of this paper is that with few exceptions, every pattern of orders and residues can be obtained by an Abelian differential. These exceptions are two families in genus zero when the orders of the poles are either all simple or all nonsimple. Moreover, we even show that the pattern can be realized in each connected component of strata. Finally we give consequences of these results in algebraic and flat geometry. The main ingredient of the proof is the flat representation of the Abelian differentials.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
2. Boîte à outils	5
3. Les différentielles sur la sphère de Riemann	8
4. Les différentielles sur les surfaces de genre supérieur	17
5. Applications	20
Références	24

1. INTRODUCTION

Soient X une surface de Riemann compacte de genre g et K_X son fibré en droites canonique. Une *différentielle abélienne* de X est une section méromorphe non nulle de K_X . Localement, elle s'écrit $f(z)dz$, où f est une fonction méromorphe. Il est bien connu (voir par exemple [Sai10, Encadré III.2]) que les invariants en un point P d'une différentielle abélienne ω sont l'ordre de la différentielle en P et le *résidu* $\text{Res}_P(\omega)$ dans le cas où P est un pôle de ω .

Ces invariants ne sont pas arbitraires mais vérifient certaines propriétés. Tout d'abord le résidu d'un pôle d'ordre -1 est toujours non nul. Ensuite, la somme des ordres des zéros et des pôles d'une différentielle est égale à $2g - 2$. Enfin la somme des résidus s'annule. Réciproquement, on peut se demander si il existe des différentielles méromorphes possédant des invariants locaux prescrits satisfaisant ces relations. Deux théorèmes célèbres apportent des réponses partielles à ce problème.

Le premier est le théorème de Riemann-Roch (voir le théorème 9.3 de [Rey89]) qui permet d'obtenir certaines différentielles avec des ordres fixés. Toutefois, ce théorème ne donne aucune information sur les résidus de ces différentielles. De plus, ce résultat ne permet de montrer qu'il existe des différentielles pour tous les ordres que nous pouvons considérer. Par exemple, le fait qu'il existe des différentielles holomorphes dont les ordres sont donnés par une partition quelconque de $2g - 2$ a été montré dans [MS93] par des méthodes complètement différentes.

Date: 11 mars 2021.

Key words and phrases. Abelian differential, Flat surface, Strata, Residue.

Le second résultat est le théorème de Mittag-Leffler (voir la proposition 9.3 de [Rey89]) qui démontre l'existence de différentielles avec l'ordre des pôles et les résidus correspondants imposés. Toutefois, ce théorème ne donne aucune information sur les zéros de ces différentielles.

Dans cet article, nous nous proposons de répondre à la question suivante.

Étant donnés les ordres des zéros et pôles ainsi que les résidus aux pôles, existe-t-il une différentielle ayant ces invariants locaux?

1.1. Définitions et résultats principaux. Afin de préciser la question précédente, nous introduisons un certain nombre de notions. Nous désignerons par

$$\mu := (a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$$

une partition de $2g-2$ qui contient s fois -1 , où les a_i sont des nombres strictement positifs et les b_i sont supérieurs ou égaux à 2. La strate $\Omega\mathcal{M}_g(\mu)$ paramètre les différentielles de type μ . Les strates (non vides) de différentielles sont des orbifolds de dimension $2g-1+n$. Le théorème des résidus implique que les strates $\Omega\mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n; -1)$ sont vides. Dans la suite nous considérerons les partitions μ de $2g-2$ qui ne sont pas de la forme $(a_1, \dots, a_n; -1)$. Notons qu'en général, les strates ne sont pas connexes et leurs composantes connexes ont été classifiées par [Boi15] dans le cas des différentielles méromorphes.

Soit $\Omega\mathcal{M}_g(\mu)$ est une strate abélienne, on définit l'espace résiduel de type μ par

$$\mathcal{R}_g(\mu) := \left\{ (r_1, \dots, r_{p+s}) \in \mathbb{C}^p \times (\mathbb{C}^*)^s : \sum_{i=1}^{p+s} r_i = 0 \right\}. \quad (1.1)$$

Comme le résidu d'une différentielle ω à un pôle simple est non nul et la somme des résidus de ω est égale à zéro, cet espace paramètre l'ensemble des configurations de résidus que peut prendre une différentielle de $\Omega\mathcal{M}_g(\mu)$. Soit $\{P_i\}_{i \in \{1, \dots, p+s\}}$ l'ensemble des pôles de ω , l'application résiduelle est

$$\mathfrak{R}_g(\mu): \Omega\mathcal{M}_g(\mu) \rightarrow \mathcal{R}_g(\mu) : (X, \omega) \mapsto (\text{Res}_{P_i}(\xi))_{i \in \{1, \dots, p+s\}}. \quad (1.2)$$

Nous décrivons maintenant l'image de l'application résiduelle de chaque composante connexe des strates de différentielles abéliennes. Tout d'abord dans le cas des différentielles sur les surfaces de Riemann de genre $g \geq 1$.

Théorème 1.1. *Soit $\Omega\mathcal{M}_g(\mu)$ une strate de différentielles abéliennes avec $g \geq 1$. La restriction à chaque composante connexe de $\Omega\mathcal{M}_g(\mu)$ de l'application résiduelle $\mathfrak{R}_g(\mu): \Omega\mathcal{M}_g(\mu) \rightarrow \mathcal{R}_g(\mu)$ est surjective.*

Le cas des différentielles sur la sphère de Riemann est donné dans le résultat le suivant.

Théorème 1.2. *Soient $\mu = (a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$ une partition de -2 , l'image de l'application résiduelle de la strate $\Omega\mathcal{M}_0(\mu)$ est donné par l'un des cas suivant.*

i) *Si $s = 0$ et qu'il existe un indice i tel que*

$$a_i > \sum_{j=1}^p b_j - (p+1), \quad (1.3)$$

alors l'image de $\mathfrak{R}_0(\mu)$ est $\mathcal{R}_0(\mu) \setminus \{0\}$.

ii) *L'image de $\mathfrak{R}_0(a_1, \dots, a_n; (-1^s))$ est le complémentaire des plans engendré par les uplets $(x_1, \dots, x_{s_1}, -y_1, \dots, -y_{s_2})$ où $x_i, y_j \in \mathbf{N}$ sont premiers entre eux et*

$$\sum_{i=1}^{s_1} x_i = \sum_{j=1}^{s_2} y_j \leq \max(a_1, \dots, a_n). \quad (1.4)$$

iii) *Dans les autres cas, l'application résiduelle $\mathfrak{R}_0(\mu)$ est surjective.*

1.2. Applications. Nous donnons maintenant deux applications à la géométrie de l'espace des modules des courbes algébriques pointées et des différentielles abéliennes holomorphes.

Lieu de Weierstraß. La première conséquence est un résultat sur la géométrie de l'espace des modules des courbes pointées. Notons que la première des deux assertions a été prouvée par Eisenbud et Harris dans [EH87, théorème 3.1] à l'aide des séries linéaires limites. L'illustration des courbes stables pointées de cet énoncé est donné dans la figure 12.

Proposition 1.3. *Soit $\overline{\mathfrak{W}}_g$ l'adhérence dans $\overline{\mathcal{M}}_{g,1}$ du lieu paramétrant les points de Weierstraß des courbes algébriques de genre g .*

- i) *Le lieu $\overline{\mathfrak{W}}_g$ n'intersecte pas le lieu des courbes stables où g courbes elliptiques sont attachées à un \mathbb{P}^1 contenant le point marqué.*
- ii) *Le lieu $\overline{\mathfrak{W}}_g$ intersecte le lieu où $g-1$ courbes elliptiques sont attachées à un \mathbb{P}^1 contenant le point marqué et l'une de ces courbes elliptiques est attachée par deux points au \mathbb{P}^1 .*

Cylindres sur une surface plate. La seconde application est sur la géométrie des surfaces de translations associées à une différentielle abélienne holomorphe. Naveh a montré dans [Nav08] que le nombre maximal de cylindres disjoints dans une différentielle holomorphe de la strate $\Omega\mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n)$ est $g+n-1$ et que cette borne est toujours atteinte. Nous précisons ce résultat dans deux directions.

Tout d'abord, nous décrivons les périodes possibles des circonférences de ces cylindres. Notons que la période d'un cylindre est un nombre complexe non nul bien définie modulo multiplication par ± 1 .

Proposition 1.4. *Soient $S := \Omega\mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n)$ une strate de différentielles abéliennes holomorphes et $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_t) \in (\mathbb{C}^*/\{\pm 1\})^t$. Il existe une différentielle dans S avec t cylindres disjoints dont les circonférences sont $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ si et seulement s'il existe une différentielle stable (X, ω) avec t nœuds, telle que :*

- (1) *la restriction de ω à chaque composante irréductible possède un pôle simple aux points nœuds ;*
- (2) *les résidus aux points nœuds correspondant à un nœud sont $\pm \lambda_i$;*
- (3) *les singularités de la restriction de ω à la partie lisse de X sont d'ordres (a_1, \dots, a_n) .*

Cette proposition permet de montrer que tous les t -uplets sont des circonférences si $t < g$. Toutefois, il existe en général des restrictions si $t = g$. Ces faits sont énoncés dans le corollaire 5.1.

D'autre part nous montrons que la borne sur le nombre de cylindres est atteinte dans chaque composante connexe des strates de différentielles holomorphes.

Proposition 1.5. *Dans chaque composante connexe de $\Omega\mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n)$ il existe une différentielle abélienne avec $g+n-1$ cylindres.*

1.3. Liens avec d'autres travaux. Le présent texte est une version améliorée de la partie sur les différentielles abéliennes du papier [GT17]. En particulier, les théorèmes 1.1 et 1.2 correspondent respectivement à la proposition 1.3 et au théorème 1.5 de [GT17]. De plus, le point ii) du théorème 1.2 a été grandement amélioré. La partie sur les pluridifférentielles sera exposée dans un prochain article.

Jusqu'à présent la question que nous traitons dans cet article a été considérée uniquement dans certains cas particuliers en genre zéro. Quelques résultats se trouvent dans la Section 2 de [EH87] en lien avec les séries linéaires limites. [Ere20] donne de manière indépendante un énoncé équivalent au point ii) du théorème 1.2 en lien avec les métriques sphériques. Un cas simple du point i) du théorème 1.2 apparaît dans [Bai+18, Lemme 3.6] en lien avec les dégénération de différentielles abéliennes. Plus précisément, l'article [Bai+18] nous permet de comprendre les limites des différentielles d'une strate. Dans ce cas, on a besoin

de connaître l'existence de différentielles dont les ordres des zéros et des pôles ainsi que des résidus ont été fixés. Notre article peut donc être vu comme la dernière pierre dans la description du bord des strates donnée par [Bai+18].

En plus des applications que nous donnons dans la section 5, les résultats de cet article sont utilisés en géométrie tropicale [MUW21], pour étudier la dégénération des points de Weierstraß de manière plus précise [Gen21] ou encore pour l'étude de certains espaces d'Hurwitz [Mul21].

1.4. Organisation de cet article. Le schéma de la preuve de ces théorèmes est le suivant. Dans un premier temps nous utilisons la correspondance entre les différentielles méromorphes et certaines classes de surfaces plates introduites par [Boi15] et étudiées dans [Tah18]. Cette correspondance nous permet de construire explicitement des différentielles ayant les propriétés souhaitées lorsque le genre et le nombre de singularités sont petits.

Dans un second temps, nous déduisons de ces résultats les autres cas grâce à deux opérations introduites par [KZ03]. Ces deux opérations sont l'*éclatement d'un zéro* et la *couture d'anse*. La première de ces opérations permet d'augmenter le nombre de singularités sans changer le genre d'une différentielle. La seconde préserve le nombre de singularités mais augmente le genre de la surface de Riemann sous-jacente.

Enfin, dans les cas où l'application résiduelle n'est pas surjective, nous développons des méthodes ad hoc afin de montrer la non-existence de différentielles possédant certains invariants locaux.

L'article s'organise comme suit. Pour terminer cette introduction, nous posons quelques conventions. Dans la section 2 nous faisons les rappels nécessaires sur les représentations plates des différentielles méromorphes et sur les deux opérations précédemment citées. De plus, nous introduisons les briques élémentaires qui nous permettront de construire les différentielles avec les propriétés souhaitées. La section 3 est dédiée au cas du genre $g = 0$ et la section 4 à celui des genres $g \geq 1$. Enfin les preuves des applications de la section 1.2 sont données dans la section 5.

1.5. Conventions. Dans cet article nous définissons le *résidu* d'une forme différentielle comme étant le résidu usuel multiplié par la constante $2i\pi$. En particulier, le théorème des résidus s'énonce

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_i \text{Res}_{P_i} \omega,$$

où les P_i sont les pôles de ω encerclés par γ . Cette convention n'a aucune incidence sur l'énoncé des résultats, mais rend les preuves plus agréables.

Si une strate paramètre des différentielles avec m singularités égales à a , alors nous noterons cela (a^m) . Par exemple $\Omega\mathcal{M}_3(3, 3; -1, -1)$ pourra être notée $\Omega\mathcal{M}_3((3^2); (-1^2))$. Plus généralement, si nous considérons une suite (a, \dots, a) de m nombres complexes tous identiques, nous noterons cette suite (a^m) . Nous espérons que ces notations seront claires dans le contexte.

1.6. Remerciements. Nous remercions Corentin Boissy pour des discussions enrichissantes liées à cet article. Une question de David Auricino est à l'origine de la proposition 1.4. Le premier auteur remercie l'*Institut für algebraische Geometrie* de la *Leibniz Universität Hannover* et le *Centro de Ciencias Matemáticas* de la *Universidad Nacional Autónoma de México* où il a élaboré une grande partie de ce texte. Le deuxième auteur est financé par l'Israel Science Foundation (grant No. 1167/17) et le European Research Council (ERC) dans le cadre du European Union Horizon 2020 Research and Innovation Programme (grant agreement No. 802107). Enfin, nous remercions le rapporteur anonyme d'une première version de cet article pour sa relecture attentive et ses remarques qui ont grandement amélioré la qualité de cet article.

2. BOÎTE À OUTILS

Dans cette section, nous introduisons les objets et les opérations de base de nos constructions. Nous introduisons dans la section 2.1 les briques élémentaires pour construire des surfaces plates. Nous poursuivons par un rappel sur les différentielles entrelacées et les opérations d'éclatement d'un zéro et de couture d'anse dans la section 2.2. Enfin, nous discuterons un cas spécial de surfaces plates dans la section 2.3.

2.1. Briques élémentaires. Dans ce paragraphe, nous introduisons des surfaces plates à bord qui nous serviront de briques pour construire les différentielles méromorphes ayant les propriétés locales souhaitées.

Les éléments de base de nos constructions seront une généralisation des *domaines basiques* introduit par [Boi15]. Étant donnés des vecteurs (v_1, \dots, v_l) dans $(\mathbf{C}^*)^l$. Nous considérons la ligne brisée L dans \mathbf{C} donnée par la concaténation d'une demi-droite correspondant à \mathbf{R}_- , des v_i pour i croissant et d'une demi-droite correspondant à \mathbf{R}_+ . Nous supposons que les v_i sont tels que L ne possède pas de points d'auto-intersection.

Le *domaine basique positif* (resp. *negatif*) $D^+(v_1, \dots, v_l)$ (resp. $D^-(v_1, \dots, v_l)$) est l'adhérence de la composante connexe de $\mathbf{C} \setminus L$ contenant les nombres complexes au dessus (resp. en dessous) de L . Étant donné un domaine positif $D^+(v_1, \dots, v_l)$ et un négatif $D^-(w_1, \dots, w_r)$, on construit le *domaine basique ouvert à gauche* (resp. *droite*) $D_g(v_1, \dots, v_l; w_1, \dots, w_r)$ (resp. $D_d(v_1, \dots, v_l; w_1, \dots, w_r)$) en collant par translation les deux demi-droites correspondant à \mathbf{R}_+ (resp. \mathbf{R}_-).

On se donne $b \geq 2$ et $\tau \in \{1, \dots, b-1\}$. Soient $(v_1, \dots, v_l; w_1, \dots, w_r)$ des vecteurs de \mathbf{C}^* tels que la partie réelle de leurs sommes est positive et que l'argument (pris dans $]-\pi, \pi]$) des v_i est décroissant, des w_j est croissant. La *partie polaire d'ordre b et de type τ* associée à $(v_1, \dots, v_l; w_1, \dots, w_r)$ est la surface plate à bord obtenue de la façon suivante. Prenons l'union disjointe de $\tau-1$ domaines basiques ouverts à gauche associé à la suite vide, $b-\tau-1$ domaines basiques ouverts à droite associé à la suite vide. Enfin prenons le domaine positif associé aux v_i et le domaine négatif associé aux w_j . On colle alors par translation la demi-droite inférieure du i -ième domaine polaire ouvert à gauche à la demi-droite supérieure du $(i+1)$ -ième. La demi-droite inférieure du domaine $\tau-1$ est identifiée à la demi droite de gauche du domaine positif. La demi-droite de gauche du domaine négatif est identifiée à la positive du premier domaine ouvert à gauche. On procède de même à droite. La figure 1 illustre cette construction.

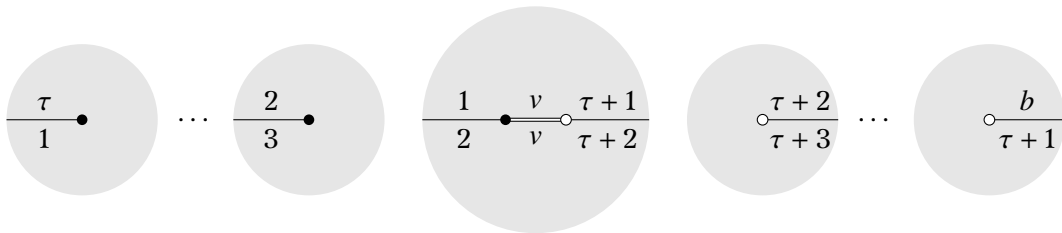


FIGURE 1. Une partie polaire d'ordre b de type τ associée à $(v; v)$. Les demi-droites dont les labels coïncident sont identifiés par translation.

Si $\sum v_i = \sum w_j$ nous dirons que cette partie polaire est *triviale*. Dans le cas contraire, nous dirons que la partie polaire est *non triviale*. Sur la figure 2, le dessin de gauche illustre une partie polaire non triviale.

On se donne maintenant des vecteurs (v_1, \dots, v_l) avec $l \geq 1$ tels que la concaténation V de ces vecteurs dans cet ordre n'a pas de points d'auto-intersection. De plus, on suppose qu'il existe deux demi-droites parallèles L_D et L_F de vecteur directeur \vec{l} , issues respectivement du point de départ D et final F de V , ne rencontrant pas V et telles que $(\overrightarrow{DF}, \vec{l})$ est une

base positive de \mathbf{R}^2 . On définit la *partie polaire* $C(v_1, \dots, v_l)$ d'ordre 1 associé aux v_i comme le quotient du sous-ensemble de \mathbf{C} entre V et les demi-droites L_D et L_F par l'identification de L_D à L_F par translation. Le résidu du pôle simple correspondant est donné par la somme $F - D$ des v_i . Une partie polaire d'ordre 1 est donnée à droite de la figure 2.

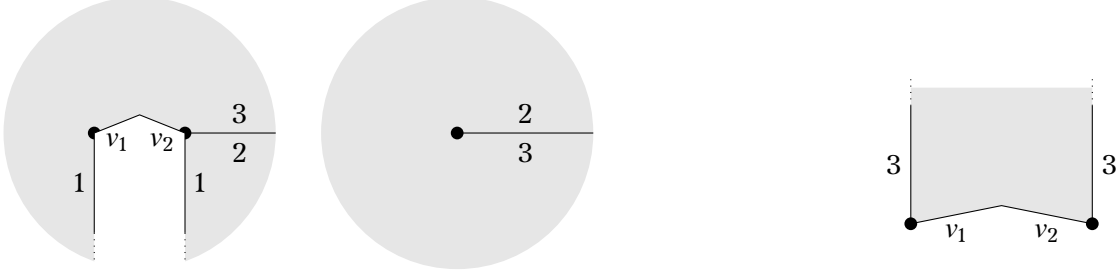


FIGURE 2. Une partie polaire non triviale associée à $(v_1, v_2; \emptyset)$ d'ordre 3 (de type 1) à gauche et d'ordre 1 à droite.

D'après le théorème des résidus, l'intégration de ω le long d'un lacet fermé γ est égale à la somme des résidus aux pôles encerclés par γ . En effet, rappelons notre convention que notre résidu est égal à $2i\pi$ fois le résidu usuel. Cela a la conséquence suivante qui, bien qu'élémentaire, est primordiale pour notre étude.

Lemme 2.1. Soient $(v_1, \dots, v_l; w_1, \dots, w_l')$ des nombres complexes, le pôle associé à la partie polaire d'ordre b et de type τ associée à $(v_1, \dots, v_l; w_1, \dots, w_l')$ est d'ordre $-b$ et de résidu égal à $\sum_{i=1}^l v_i - \sum_{j=1}^{l'} w_j$.

Soit (v_1, \dots, v_l) avec $l \geq 1$, le pôle associé au domaine polaire d'ordre 1 associé à v_i est d'ordre -1 et possède un résidu égal à $\sum_{i=1}^l v_i$.

2.2. Différentielles entrelacées, éclatement de zéros et couture d'anses. Dans ce paragraphe, nous décrivons certains cas particuliers des résultats obtenus dans [Bai+18] au sujet des différentielles entrelacées. Cela nous permet de rappeler les constructions de l'éclatement des zéros et de la couture d'anse.

Tout d'abord, nous rappelons la définition d'une différentielle entrelacée. Étant donnée une partition $\mu := (m_1, \dots, m_t)$ telle que $\sum_{i=1}^t m_i = 2g - 2$, une *différentielle entrelacée* η de type μ sur une courbe stable t -marquée (X, z_1, \dots, z_t) est une collection de différentielles non nulles η_v sur les composantes irréductibles X_v de X satisfaisant aux conditions suivantes.

(0) (**Annulation comme prescrit**) Chaque différentielle η_v est méromorphe et le support de son diviseur est inclus dans l'ensemble des nœuds et des points marqués de X_v . De plus, si un point marqué z_i se trouve sur X_v , alors $\text{ord}_{z_i} \eta_v = m_i$.

(1) (**Ordres assortis**) Pour chaque nœud de X qui identifie $q_1 \in X_{v_1}$ à $q_2 \in X_{v_2}$,

$$\text{ord}_{q_1} \eta_{v_1} + \text{ord}_{q_2} \eta_{v_2} = -2.$$

(2) (**Résidus assortis aux pôles simples**) Si à un nœud de X qui identifie $q_1 \in X_{v_1}$ avec $q_2 \in X_{v_2}$ on a $\text{ord}_{q_1} \eta_{v_1} = \text{ord}_{q_2} \eta_{v_2} = -1$, alors l'équation suivante est vérifiée

$$\text{Res}_{q_1} \eta_{v_1} + \text{Res}_{q_2} \eta_{v_2} = 0.$$

Ce n'est que pour des cas très particuliers que nous aurons besoin de savoir quand une différentielle entrelacée est lissable dans la strate $\Omega\mathcal{M}_g(\mu)$. Nous rappelons ici uniquement les cas qui nous intéressent. Le premier cas est celui où l'ordre des différentielles à tous les points nodaux est égal à -1 .

Lemme 2.2. Soit $\eta = \{\eta_v\}$ une différentielle entrelacée de type μ . Si l'ordre des différentielles η_v aux nœuds est -1 , alors η est lissable dans la strate $\Omega\mathcal{M}_g(\mu)$ sans modifier les résidus aux pôles aux points non nodaux.

Notons que dans ce cas, la notion de différentielle entrelacée correspond à la notion classique de différentielle stable. Ainsi nous pourrions nous ramener à ce résultat pour prouver le lemme 3.9 et la proposition 1.4.

Maintenant nous regardons le cas des différentielles entrelacées à deux composantes.

Lemme 2.3. *Supposons que X possède exactement deux composantes X_1 et X_2 reliées par un unique nœud qui identifie $q_1 \in X_1$ à $q_2 \in X_2$. Si une différentielle entrelacée de type μ vérifie $\text{ord}_{q_1} \eta_1 > -1 > \text{ord}_{q_2} \eta_2$, alors elle est lissable dans $\Omega\mathcal{M}_g(\mu)$ si et seulement si $\text{Res}_{q_2} \eta_2 = 0$.*

De plus, si cette condition est vérifiée, alors le lissage peut se faire sans modifier les résidus aux pôles de η_1 .

Remarquons que le fait que le lissage peut se faire sans modifier les résidus n'est pas explicitement prouvé dans [Bai+18]. Toutefois, cela se déduit des techniques de [Bai+18] de la façon suivante. Comme le résidu est nul, il n'y a pas besoin de modifier la différentielle sur X_1 pour pouvoir lisser. Il suffit donc de remplacer le nœud par un cylindre plat.

Maintenant, nous donnons deux applications cruciales du lemme 2.3.

Proposition 2.4 (Éclatement d'un zéro). *Soient (X, ω) une différentielle de type μ et $z_0 \in X$ un zéro d'ordre a_0 de ω . Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_t)$ un t -uplet d'entiers positifs tels que $\sum_i \alpha_i = a_0$.*

Il existe une opération sur (X, ω) en z_0 qui fournit une différentielle (X', ω') de type $(\alpha_0, \dots, \alpha_t, \mu \setminus \{a_0\})$ qui ne modifie pas les résidus aux pôles de ω .

Démonstration. Partons de (X, ω) . On forme une différentielle entrelacée en attachant au point z_0 une droite projective avec une différentielle ayant les ordres souhaités. Le lemme 2.3 implique directement la proposition 2.4. \square

La seconde construction nous permettra en particulier de faire une récurrence sur le genre des surfaces de Riemann.

Proposition 2.5 (Couture d'anse). *Soient (X, ω) une différentielle abélienne dans la strate $\Omega\mathcal{M}_g(\mu)$ et $z_0 \in X$ un zéro d'ordre a_0 de ω . Il existe une opération qui ne modifie pas les résidus aux pôles de ω et qui donne une différentielle (X', ω') dans la strate $\Omega\mathcal{M}_{g+1}(a_0 + 2, \mu \setminus \{a_0\})$.*

Démonstration. Partons de (X, ω) . On forme une différentielle entrelacée en attachant au point z_0 une courbe elliptique avec une différentielle de type $(a_0 + 2; -a_0 - 2)$. Le lemme 2.3 permet de conclure. \square

Pour terminer, il est intéressant de noter que l'existence de différentielles holomorphes pour toute partition μ de $2g - 2$ prouvée par [MS93] se déduit des deux propositions précédentes et du fait que la strate $\Omega\mathcal{M}_2(2)$ est non vide. En effet, pour montrer que les strates de la forme $\Omega\mathcal{M}_g(2g - 2)$ ne sont pas vides, on coud successivement $g - 2$ anses à une différentielle de cette strate. Les strates avec $n \geq 2$ zéros s'obtiennent en éclatant le zéro de ces strates.

2.3. Différentielles à cœur dégénéré. Les différentielles à cœur dégénéré constitue une famille particulièrement simple d'exemples de différentielles abéliennes. En particulier, beaucoup de problèmes géométriques se simplifient sur ces différentielles en des problèmes combinatoires.

Rappelons que le cœur d'une différentielle est l'enveloppe convexe des singularités coniques pour la métrique induite par la différentielle. On dit que le cœur est *dégénéré* s'il est d'intérieur vide, c'est-à-dire s'il est réduit à l'union d'un nombre fini de liens selles.

Le complémentaire du cœur d'une surface de translations S possède autant de composantes connexes que de pôles. On appelle *domaine polaire* la composante à laquelle un pôle appartient. Le bord d'un domaine polaire est toujours formé par un nombre fini de liens selles (voir le lemme 2.1 de [Tah18]). De plus, si le cœur de S est dégénéré, alors il y a exactement $2g + n + p - 2$ connexions de selles dans S , où n est le nombre de zéros et p le nombre de pôles de S .

L'intérêt de cette notion pour notre problème est donné par la proposition suivante.

Proposition 2.6. *Dans une strate donnée, le lieu des différentielles abéliennes ou quadratique dont tous les résidus sont nuls est soit vide soit contient une différentielle à cœur dégénéré.*

Démonstration. Le lieu d'une strate où les résidus sont tous nuls est $GL^+(2, \mathbb{R})$ -invariant. Or, d'après le lemme 2.2 de [Tah18], chaque $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbite contient une surface plate dont le cœur est dégénéré. \square

3. LES DIFFÉRENTIELLES SUR LA SPHÈRE DE RIEMANN

Cette section est dédié au cas des différentielles sur une surface de Riemann de genre 0. Nous y donnons la preuve du Théorème 1.2. Dans la section 3.1, nous traitons le cas général. Puis nous considérons dans la section 3.2 le cas où tous les résidus sont nuls. Enfin, nous traitons le cas des résidus colinéaires dans les strates dont tous les pôles sont simples dans la section 3.3.

3.1. Le cas général. Dans cette section nous montrons l'existence de différentielles sur la sphère de Riemann possédant les invariants souhaités dans la majorité des cas. Plus précisément, nous traitons les cas des résidus non nuls si il existe un pôle d'ordre $b_i \geq 2$ et des résidus non tous colinéaires si tous les pôles sont simples.

L'objet géométrique clef de la démonstration est le suivant. Soit $v := (v_1, \dots, v_t)$ un uplet avec $v_i \neq 0$ et $\sum_{i=1}^t v_i = 0$. Nous supposons, quitte à permuter les indices, que l'argument des vecteurs v_1, \dots, v_t est décroissant dans $]-\pi, \pi]$. Le *polygone résiduel* $\mathfrak{P}(v)$ est le polygone obtenu en concaténant les vecteurs v_1, \dots, v_t dans cet ordre. Remarquons que $\mathfrak{P}(v)$ est un polygone convexe, éventuellement dégénéré, c'est à dire d'intérieur vide.

Nous commençons par traiter le cas des résidus non tous colinéaires. Rappelons que deux éléments v_1 et v_2 de \mathbb{C} sont *colinéaires* si au moins un des v_i est zéro ou s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $v_1 = \alpha v_2$.

Lemme 3.1. *Soit $\mu := (a; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$ une partition de -2 . Si $r = (r_1, \dots, r_{p+s}) \in \mathcal{R}_0(\mu)$ est un élément de l'espace résiduel de $\Omega\mathcal{M}_0(\mu)$ qui possède deux éléments non colinéaires, alors r est dans l'image de l'application résiduelle $\mathfrak{R}_0(\mu)$.*

Démonstration. Notons par r^* l'ensemble des résidus non nuls. Comme les r_i ne sont pas colinéaires, le polygone résiduel $\mathfrak{P}(r^*)$ est non dégénéré. Pour tous les pôles P_i d'ordre $-b_i$ ayant un résidu non nul r_i , on prend une partie polaire d'ordre b_i associée à $(r_i; \emptyset)$ (et de type arbitraire). Pour tous les pôles P_j d'ordre $-b_j$ ayant un résidu nul, on prend une partie triviale d'ordre b_j associée à $(r_j; r_j)$, où $r_j \neq 0$ est le résidu (non nul) au pôle P_j . Les collages de ces parties polaires avec le polygone résiduel se font de la façon suivante.

Étant donnée une partie polaire non triviale associée à un pôle P_i . S'il existe un pôle P_j qui à une partie polaire associée à $(r_j; r_j)$, alors nous collons le segment r_i de P_i au segment r_j du domaine basique négatif de P_j . Nous continuons ces collages jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de pôles sans résidu avec une partie polaire associée à $(r_i; r_i)$. Puis nous collons le dernier segment r_i au segment r_i du polygone résiduel. Nous faisons de même pour tous les pôles de résidus non nuls. Cette construction est illustrée par la figure 3.

La différentielle associée à cette surface plate possède clairement les invariants désirés aux pôles. Vérifions maintenant qu'elle est de genre zéro et possède un unique zéro. Remarquons que si l'on coupe cette surface le long d'un lien selle, on obtient deux surfaces connexes disjointes. En effet, les liens selles correspondent soit au bord des parties polaires, soit aux diagonales du polygone résiduel. Une telle propriété implique qu'il existe un unique zéro, car s'il y en avait deux, un lien selle entre les deux ne déconnecterait pas la surface. De manière similaire, on en déduit que le genre de la surface est nul. \square

Nous traitons maintenant le cas des résidus colinéaires non tous nuls dans le cas où il existe au moins un pôle d'ordre supérieur ou égal à 2.

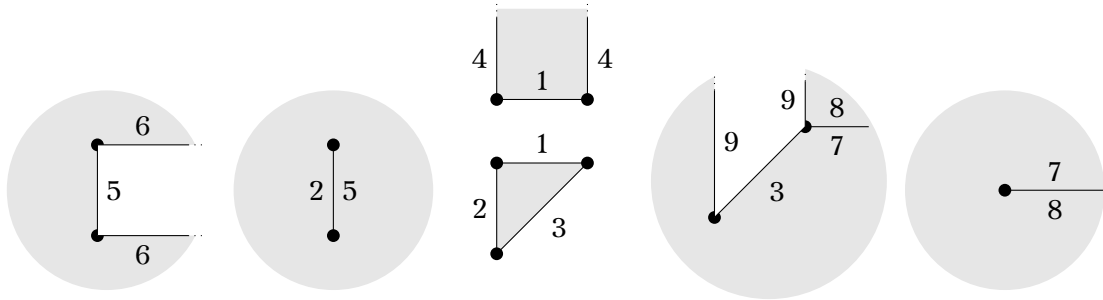


FIGURE 3. Une différentielle dans la strate $\Omega\mathcal{M}_0(4; -2, -2, -3; -1)$ dont les résidus sont $(0, i, -1 - i, 1)$.

Lemme 3.2. Soit $\mu := (a; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$ une partition de -2 telle que $p \neq 0$. Un élément $r = (r_1, \dots, r_{p+s}) \in \mathcal{R}_0(\mu)$ non nul de l'espace résiduel est dans l'image de l'application résiduelle $\mathfrak{R}_0(\mu)$.

Démonstration. Par le lemme 3.1, il suffit de considérer le cas où tous les r_i sont colinéaires. Dans ce cas le polygone résiduel est dégénéré, mais comme les r_i ne sont pas tous nuls ce polygone n'est pas réduit à un point. Sans perte de généralité, nous supposons que les résidus sont réels. De plus, nous ordonnons les indices de telle sorte que l'ensemble des résidus non nuls $r^* = \{r_{j_1}, \dots, r_{j_t}\}$ satisfait $r_{j_i} < 0$ pour $i \leq u$ et $r_{j_i} > 0$ pour $u < i \leq t$. Nous notons $J = \{j_1, \dots, j_t\}$.

Prenons le pôle P_1 d'ordre $-b_1$. Si $r_1 = 0$, nous associons à ce pôle une partie polaire d'ordre b_1 associée aux vecteurs $(-r_{j_1}, \dots, -r_{j_u}; r_{j_{u+1}}, \dots, r_{j_t})$. Si $r_1 \neq 0$, on suppose que $r_1 = r_{j_1}$ et on associe à ce pôle une partie polaire d'ordre b_1 associée aux vecteurs $(-r_{j_2}, \dots, -r_{j_u}; r_{j_{u+1}}, \dots, r_{j_t})$. Nous associons aux pôles P_{j_i} , pour $1 \leq i \leq u$ si $1 \notin J$ et $2 \leq i \leq u$ si $1 \in J$, une partie polaire d'ordre b_{j_i} associée à $(\emptyset; -r_{j_i})$. Pour les $u < i \leq t$ nous prenons une partie polaire d'ordre b_i associée à $(r_i; \emptyset)$. Pour tous les pôles P_k d'ordre $-b_k$ ayant un résidu nul, on prend une partie triviale d'ordre b_k associée à $(\pm r_{i_k}; \pm r_{i_k})$ avec $i_k \in J \setminus \{1\}$. On colle les parties polaires triviales comme dans la preuve du lemme 3.1. On obtient une union de surfaces plates à bord. Il reste à coller les bords restants aux segments de la partie polaire de P_1 .

La preuve du fait que la différentielle ainsi construite vérifie les propriétés désirées est en tout point similaire à la preuve de ce fait dans la démonstration du lemme 3.1. \square

3.2. Les résidus de tous les pôles sont nuls. Nous complétons la preuve des cas i) et iii) du théorème 1.2. Au vu des lemmes 3.1 et 3.2, il reste à montrer le résultat suivant.

Lemme 3.3. L'application résiduelle des strates $\Omega\mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p)$ ne contient pas l'origine $(0, \dots, 0)$ si et seulement si la condition (1.3) est satisfaite.

Rappelons que cette condition dit que si l'ordre d'un zéro a_i est strictement supérieur à $\sum_{j=1}^p b_j - (p+1)$, alors l'origine n'est pas contenue dans l'image de l'application résiduelle.

Démonstration. Nous commençons par montrer que si l'origine est dans l'image de l'application résiduelle alors tous les zéros sont d'ordres inférieurs ou égaux à $\sum_{j=1}^p b_j - (p+1)$. Soit ω une différentielle sur la sphère de Riemann de la strate $\Omega\mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p)$ dont les résidus aux pôles sont nuls et S la surface plate associée. Nous pouvons supposer par la proposition 2.6 que la surface S possède un cœur dégénéré et des liens selles horizontaux. Coupons S le long de ces liens selles et de toutes les demi-droites horizontales issues des singularités. On obtient alors une union disjointe de demi-plan positifs et négatifs. De plus, remarquons que chaque pôle d'ordre $-b_j$ est associé à $b_j - 1$ demi-plan positifs et $b_j - 1$ demi-plan négatifs.

Considérons une singularité conique, disons z_1 d'angle $2\pi(a_1 + 1)$. Comme les résidus aux pôles sont nuls, on obtient directement du théorème des résidus que tout chemin fermé de S possède une période nulle. Cela implique que les points correspondant à z_1 peuvent apparaître au plus une fois par demi-plan. Comme l'angle à chaque sommet dans chaque demi plan est π l'angle maximal de la singularité conique z_1 est $2\pi \sum_{j=1}^p (b_j - 1)$. Cela est équivalent au fait que l'ordre a_1 de z_1 est inférieur ou égal à $\sum_{j=1}^p b_j - (p + 1)$.

Nous montrons maintenant que si tous les zéros d'une différentielle sont d'ordres inférieurs ou égaux à $\sum b_j - (p + 1)$ alors l'origine est dans l'image de l'application résiduelle. Considérons tout d'abord les strates $\Omega\mathcal{M}_0(a_1, a_2; -b_1, \dots, -b_p)$ ayant deux zéros avec $p - 1 \leq a_1, a_2 \leq \sum b_j - (p + 1)$. Pour tous les pôles nous prenons une partie polaire triviale S_i d'ordre b_i et de type τ_i associée à $(1; 1)$. Nous choisissons les τ_i tels que $\sum_i \tau_i = a_1 + 1$. Ce choix est possible car pour chaque i l'inégalité $1 \leq \tau_i \leq b_i - 1$ implique en sommant sur les pôles que $p \leq \sum_i \tau_i \leq \sum b_j - p$.

Ensuite, nous collons les bords des parties polaires de manière cyclique. Plus précisément, nous collons le segment supérieur de S_i au segment inférieur de S_{i+1} modulo p . Une telle construction est représentée sur la figure 4. La surface plate ainsi obtenue possède deux singularités coniques et est de genre nul. De plus, l'angle de la singularité conique à gauche des liens selles est d'angle $2\pi \sum \tau_i$. La différentielle ainsi construite appartient à la strate $\Omega\mathcal{M}_0(a_1, a_2; -b_1, \dots, -b_p)$ et les résidus aux pôles sont nuls.

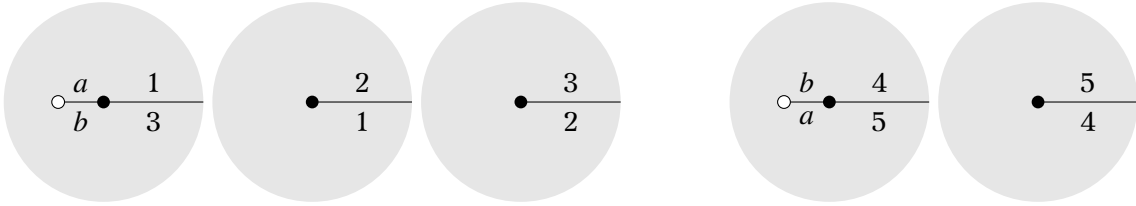


FIGURE 4. Une différentielle dans $\Omega\mathcal{M}_0(4, 1; -3, -4)$ dont les résidus sont nuls.

Nous traitons maintenant les strates $\Omega\mathcal{M}_0(a_1, a_2, a_3; -b_1, \dots, -b_p)$, avec $a_1, a_2 \leq a_3$. Il y a deux cas à considérer suivant que $a_1, a_2 > \sum b_i - p - 1$ ou non.

Si $a_1 + a_2 \leq \sum b_i - p - 1$ (et donc $p - 1 \leq a_3 \leq \sum b_i - p - 1$), alors il existe une différentielle à résidus nuls dans la strate $\Omega\mathcal{M}_0(a_1 + a_2, a_3; -b_1, \dots, -b_p)$. Donc en éclatant le zéro d'ordre $a_1 + a_2$ en deux zéros d'ordres a_1 et a_2 par la proposition 2.4, nous obtenons la différentielle souhaitée.

Supposons maintenant que $a_1 + a_2 > \sum b_i - p - 1$ (ou de manière équivalente $a_3 < p - 1$). Dans le reste de la preuve nous noterons $b := \sum b_i$. Remarquons que $a_1, a_2 \leq a_3$ et $a_1 + a_2 + a_3 = b - 2$ impliquent que $3a_3 \geq b - 2$. Nous obtenons donc que $3p > b + 1$, ce qui implique que l'un des pôles est d'ordre -2 .

Nous donnons maintenant la description d'une différentielle ayant les propriétés attendues. Cette construction est illustrée dans la figure 5 dans le cas de $\Omega\mathcal{M}_0(3^3, -2^4, -3)$. Dans un premier temps, nous décrivons le procédé, puis nous ajusterons les constantes pour obtenir les singularités coniques souhaitées.

Pour le pôle d'ordre -2 , prenons une partie polaire triviale d'ordre 2 associée à $(v_1, v_2; v_3)$ avec $v_3 = v_1 + v_2$. Pour chaque pôle P_i nous prenons une partie polaire triviale d'ordre b_i de type τ_i associée à $(v_j; v_j)$ pour un $j_i \in \{1, 2, 3\}$. Puis nous collons le segment v_{j_i} du triangle au segment v_{j_i} correspondant au domaine basique négatif de cette partie polaire. Cette opération ajoute une contribution angulaire de $2\pi\tau_i$ et $2\pi(b_i - \tau_i)$ aux singularités coniques correspondant aux sommets du segment v_{j_i} . Nous faisons de même pour tous les pôles jusqu'à obtenir une surface plate S_1 dont le bord est composé des trois segments v_j . Nous prenons maintenant le triangle $v_1v_2v_3$ et collons par translation ses trois arêtes au

bord de S_1 . La surface plate ainsi obtenue est de genre zéro, possède trois zéros distincts et n'a pas de résidus aux pôles.

Il reste à ajuster le choix des segments v_{j_i} et des types τ_i pour chaque pôle afin d'obtenir les angles souhaités. La remarque clé est que chaque pôle P_i contribue à exactement deux singularités coniques et que la contribution à chacune d'elles est d'angle compris entre 2π et $2\pi(b_i - 1)$. Réciproquement, si cette condition est satisfaite, alors la construction précédente permet de construire la différentielle souhaitée.

La situation peut donc être modélisée par un graphe biparti Γ dont trois sommets A_i représentent les trois sommets du triangle $v_1v_2v_3$ et $p - 1$ autres sommets B_i représentent les pôles P_i distincts du pôle avec la partie polaire associée au triangle. Il y a une arête entre les sommets B_i et A_j pour chaque multiple de 2π de la contribution de P_i à la singularité conique A_j . Un exemple est schématisé dans la figure 5.

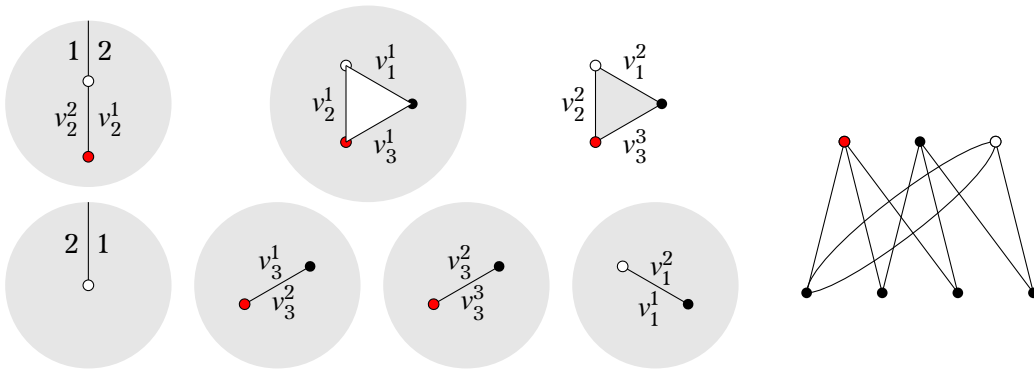


FIGURE 5. Différentielle dans $\Omega\mathcal{M}_0((3)^3; (-2)^4, -3)$ avec résidus nuls et son graphe Γ .

Il suffit de montrer qu'il est possible de distribuer les arêtes de telle façon que les sommets B_i soient de valence b_i , connectés à précisément deux sommets A_j , et que la valence de A_j soit a_j . Une telle distribution peut être obtenue de la façon suivante. Rappelons que le plus grand zéro (que nous supposons être z_3) est d'ordre $a_3 \leq p - 1$. Nous partons du graphe où tous les sommets B_i sont connectés à A_1 par exactement une arête et toutes les autres arêtes connectent A_2 . Prenons un sommet B_i quelconque. Il y a $b_i - 1$ arêtes entre B_i et A_2 . Si la valence de A_2 moins $b_i - 1$ est supérieure ou égale à a_2 , alors nous remplaçons les $b_i - 1$ arêtes entre B_i et A_2 par $b_i - 1$ arêtes entre B_i et A_3 . Nous recommençons alors cette opération jusqu'à l'indice i_0 tel que la valence de A_2 moins $b_{i_0} - 1$ soit strictement inférieure à a_2 . Dans ce cas, nous remplaçons des arêtes entre B_{i_0} et A_2 par des arêtes entre B_{i_0} et A_3 , de telle façon que la valence de A_2 soit égale à a_2 . Le sommet B_{i_0} est alors connecté aux trois sommets A_i . Donc nous enlevons l'arête entre A_1 et B_{i_0} pour la mettre entre A_3 et B_{i_0} . Comme a_1 est strictement plus petit que $p - 1$, cette opération est toujours possible. Pour terminer, nous remplaçons autant d'arêtes que nécessaire entre A_1 et les B_j pour $j > i_0$ pour les connecter à A_3 afin que la valence de A_1 soit a_1 . Notons qu'il existe toujours assez d'arêtes entre A_1 et les B_j pour obtenir la valence a_3 à A_3 car il y a un total de $p - 1$ sommets B_i et $a_3 \leq p - 1$.

Pour conclure le cas des différentielles de genre zéro avec des résidus nuls, nous considérons les strates ayant $n \geq 4$ zéros. Soient a_1 et a_2 les zéros de plus petits ordres. En notant $b = \sum_i b_i$ on a

$$a_1 + a_2 \leq \frac{2}{n}(b - 2) \leq \sum_i (b_i - 1) - \frac{4}{n} < b - p,$$

où la deuxième égalité s'obtient en remarquant que $\frac{2}{n} \leq \frac{1}{2}$ et $b_i \geq 2$ impliquent que $\frac{2b_i}{n} \leq b_i - 1$. On en déduit que $a_1 + a_2 \leq b - p - 1$ et donc que le cas $n \geq 4$ s'obtient en éclatant un zéro d'une différentielle ayant $n-1$ zéros d'ordres $a_1 + a_2$, a_i pour $i \geq 3$ et p pôles d'ordres $-b_j$. \square

3.3. Les pôles sont tous simples. Dans cette section, nous montrons le point ii) du théorème 1.2 qui traite du cas des différentielles en genre zéro n'ayant que des pôles simples.

Nous commençons par le cas des strates $\Omega\mathcal{M}_0(s-2; (-1^s))$. Nous définissons deux types de graphes que nous utilisons de manière essentielle dans la preuve.

Définition 3.4. Un *graphe de connexions* est un arbre biparti connexe Γ possédant A arêtes, dont les sommets sont partitionnés en $\Gamma_- \cup \Gamma_+$ et auxquels sont attribués des poids réels strictement positifs, tels que :

- i) la somme des poids des sommets de Γ_+ est égale à celle des poids des sommets de Γ_- ;
- ii) considérant l'opération qui consiste à retirer une feuille et soustraire le poids de ce sommet à celui qui lui est relié, appliquant cette opération entre une et $A-1$ fois à Γ , on obtient alors des graphes dont les poids sont strictement positifs.

Définition 3.5. Soit r_1, \dots, r_s des nombres complexes \mathbf{R} -colinéaires de somme nulle, un *graphe associé aux r_i* est un arbre biparti connexe vérifiant les propriétés suivantes. Étant donné $\alpha \in \mathbf{C}^*$ tel que $r'_i := \alpha r_i \in \mathbf{R}^*$ pour tout $i \leq s$, les sommets de Γ_+ (resp. Γ_-) sont en bijection avec les r'_i positifs (resp. négatifs) et le poids du sommet correspondant à r_i est $|r'_i|$.

L'image de l'application résiduelle des strates $\Omega\mathcal{M}_0(s-2; (-1^s))$ est décrite par le résultat suivant en terme de graphes.

Lemme 3.6. Soit $\Omega\mathcal{M}_0(s-2; (-1^s))$ une strate de genre zéro avec s pôles simples et un unique zéro d'ordre $s-2$. Les nombres complexes (r_1, \dots, r_s) sont dans l'image de l'application résiduelle si et seulement si l'une des propriétés est satisfaite.

- (1) Les nombres (r_1, \dots, r_s) ne sont pas colinéaires.
- (2) Les nombres (r_1, \dots, r_s) sont colinéaires et il existe un graphe associé aux r_i qui est un graphe de connexion.

Avant de passer à la preuve de ce résultat, nous illustrons ces notions dans un exemple. Nous illustrons maintenant les concepts introduits dans un exemple.

Exemple 3.7. Nous illustrons la correspondance entre une différentielle de $\Omega\mathcal{M}_0(5; (-1^7))$ et le graphe de connexion associé. La figure 6 montre que l'image de l'application résiduelle de cette strate contient les résidus $(3, (1^3), (-2^3))$.

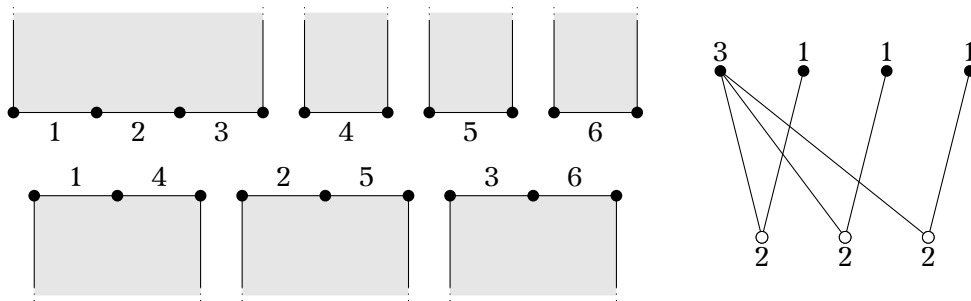


FIGURE 6. Différentielle dans $\Omega\mathcal{M}_0(5; (-1^7))$ avec résidus $(3, (1^3), (-2^3))$ et son graphe de connexions.

Démonstration du lemme 3.6. Soit $r := (r_1, \dots, r_s)$ un élément de l'espace résiduel de la strate $\Omega\mathcal{M}_0(s-2; (-1^s))$ avec $s \geq 2$. Si tous les résidus ne sont pas colinéaires alors le polygone résiduel introduit dans la section 3.1 est non dégénéré. On obtient la différentielle abélienne avec les invariants souhaités en collant des cylindres infinis à toutes les arêtes de ce polygone.

Nous supposons donc à partir de maintenant que les r_i sont colinéaires. Supposons qu'il existe un graphe Γ associé à r qui soit un graphe de connexion. On construit une différentielle de la façon suivante. Pour chaque résidu r_i on prend une partie polaire d'ordre 1 associée à r_i . Considérons une feuille de Γ . On peut coller le segment au bord de la partie polaire correspondante au segment au bord de la partie polaire correspondant à l'autre sommet de l'arête. Puis on enlève la feuille du graphe et le poids de cette feuille à l'autre sommet. On recommence cette procédure pour une feuille du nouveau graphe. Cette opération est faite de manière inductive jusqu'à ce que le graphe soit réduit à un sommet.

Nous justifions maintenant que cette opération est toujours possible. Supposons tout d'abord que le graphe possède strictement plus de deux sommets. Comme par le point ii) le poids d'une feuille est toujours strictement plus petit que le poids du sommet auquel elle est reliée, le collage est toujours possible. Enfin le point i) dit que la différence des poids est nulle, ce qui implique que la surface obtenue est sans bord. On vérifie maintenant que cette surface plate est de genre zéro et possède un unique zéro. La surface est de genre zéro car s'il existait un lacet fermé homotopiquement non trivial, cela impliquerait un chemin fermé sur le graphe de connexion. Or celui-ci est un arbre. L'arbre étant connexe, la surface l'est également. Il reste à montrer que les extrémités des liens selles constituent une unique singularité conique. En tant que graphe plongé dans la surface, le graphe des liens selles est dual de celui défini par le graphe de connexions avec des arcs reliant les pôles. Le graphe de connexions étant un arbre, il ne définit qu'une seule face. Par conséquent, le graphe des liens selles n'a qu'un seul sommet.

Supposons maintenant qu'il existe une différentielle ω dans $\Omega\mathcal{M}_0(s-2; (-1^s))$ dont les résidus sont (r_1, \dots, r_s) . Supposons que les résidus soient colinéaires, nous les supposons réels sans perte de généralité. Nous construisons un graphe associé aux r_i qui est un graphe de connexions. Les sommets de Γ_+ (resp. Γ_-) sont associés aux pôles de ω dont le résidu est positif (resp. négatif). Les poids sont les valeurs absolues des résidus. Enfin deux sommets sont connectés si et seulement si le bord de leurs domaines polaires respectifs contiennent un même lien selle.

Le fait que ω soit de genre zéro et ne possède qu'un zéro implique clairement que ce graphe biparti est un arbre. Le théorème des résidus implique directement le point i) qui dit que la différence des poids est nulle. Regardons maintenant l'effet de l'opération qui enlève une feuille au graphe de connexions (dans le cas où il possède au moins deux arêtes). Cette opération revient à couper la différentielle ω le long d'un lien selle v dont l'un des côtés est un unique domaine polaire. De plus, le domaine polaire adjacent à ce lien selle est remplacé par le domaine polaire associé aux vecteurs précédents privés de v (qui est un ensemble non vide car ω est non singulière). Les autres domaines polaires et les identifications restent les mêmes. À chaque étape, cette opération produit une différentielle de genre zéro avec un unique zéro et des pôles simples dont tous les résidus sont non nuls. Cela implique clairement le point ii) des graphes de connexions. \square

Nous montrons maintenant que les s -uplets qui ne sont pas dans l'image de l'application résiduelle $\mathfrak{R}_0(s-2; (-1^s))$ sont commensurables entre eux.

Lemme 3.8. Soient $r := (x_1, \dots, x_{s_1}, -y_1, \dots, -y_{s_2})$ avec x_i et y_j réels strictement positifs. Si le s -uplet r n'appartient pas à l'image de $\mathfrak{R}_0(s-2; (-1^s))$, alors les x_i et y_j sont commensurables entre eux.

Démonstration. Nous procédons à une démonstration par récurrence. Si on a $s_1 = 1$ ou $s_2 = 1$, toutes les configurations de résidus sont réalisables. Si $s_1 = s_2 = 2$, les seuls uplets qui ne sont pas dans l'image de l'application résiduelle sont proportionnels à $(1, 1, -1, -1)$.

À présent, on suppose que la proposition est démontrée pour tous les couples (s_1, s_2) tels que $s_1 \leq a$, $s_2 \leq b$ et au moins l'une des inégalités est stricte. Nous considérons un uplet qui n'est pas dans l'image avec s_1 nombres positifs et s_2 négatifs. Si tous les x_i et y_j soient égaux, alors on a $s_1 = s_2$ et le uplet est proportionnel à $(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$.

On peut donc supposer qu'il existe deux résidus, disons x_{s_1} et $-y_{s_2}$, tels que $y_{s_2} < x_{s_1}$. Le $(s-1)$ -uplet obtenu en retirant le résidu $-y_{s_2}$ et en remplaçant x_{s_1} par $x_{s_1} - y_{s_2}$ n'est pas réalisable. En effet, si ce nouveau uplet était réalisable, il existerait un graphe de connexions qui lui serait associé. Il suffirait d'ajouter à ce graphe une branche avec comme poids y_{s_2} au sommet de poids $x_{s_1} - y_{s_2}$ et de remplacer le poids $x_{s_1} - y_{s_2}$ par x_{s_1} . Ce graphe serait un graphe de connexions pour la configuration initiale, ce qui est absurde.

Ainsi, quitte à changer les signes, tout s -uplet non réalisable avec a résidus positifs et b négatifs s'obtient à partir d'un $s-1$ -uplet non réalisable $(x_1, \dots, x_a, -y_1, \dots, -y_{b-1})$ auquel on ajoute un résidu y_b et on remplace un résidu x_i par $x_i + y_b$. On peut supposer, quitte à changer l'ordre que $i = a$ et on note $x'_a := x_a + y_b$. On cherche donc pour quelles valeurs de y_b le s -uplet $(x_1, \dots, x'_a, -y_1, \dots, -y_b)$ est non réalisable. Par hypothèse de récurrence, on normalise ces nombres de telle sorte que les x_i et les y_j avec $j \neq b$ soient des entiers premiers entre eux. Si y_b n'était pas un entier, alors ces résidus seraient dans l'image. En effet, un graphe de connexions serait obtenu de la façon suivante. On permute y_1 et y_b . On prend s_1 sommets en haut et s_2 sommets en bas. Le sommet i_0 en haut est relié au sommet j_0 en bas si et seulement si pour $J = j_0$ ou $J = j_0 + 1$, on a

$$\sum_{i \leq i_0 - 1} x_i \leq \sum_{j \leq J} y_j \leq \sum_{i \leq i_0} x_i.$$

Les poids des sommets sont évidemment donnés par les y_j , les x_i pour $i < a$ et x'_a pour $i = s_1$. Par conséquent, pour obtenir une configuration non réalisable, il est nécessaire que y_b soit un entier. En effet, dans le cas contraire, les sommes partielles ne peuvent pas coïncider car l'une des familles de sommes partielles n'est pas constituée d'entiers et donc l'opération consistant à retirer une feuille au graphe peut toujours s'effectuer. \square

Nous pouvons donc maintenant procéder à la preuve du point ii) du théorème 1.2 dans le cas des strates $\Omega\mathcal{M}_0(s-2; (-1^s))$.

Démonstration. Étant donné un élément qui n'appartient pas à l'image de l'application résiduelle de $\Omega\mathcal{M}_0(s-2; (-1^s))$. Par le lemme 3.8 on peut supposer que cet élément est de la forme $(x_1, \dots, x_{s_1}, -y_1, \dots, -y_{s_2})$ avec x_i et y_j des entiers premiers entre eux. Nous montrons par récurrence que ce s -uplet vérifie l'équation (1.4). Rappelons que cette équation est l'inégalité $\sum_{i=1}^{s_1} x_i = \sum_{j=1}^{s_2} y_j \leq s-2$.

Nous commençons par montrer qu'il existe au moins quatre éléments du s -uplet qui sont égaux à ± 1 . Cela est vrai dans le cas des strates $\Omega\mathcal{M}_0(s-2; (-1^s))$ avec $s \leq 4$ puisque qu'on vérifie sans difficultés grâce au lemme 3.6 que le seul élément qui n'est pas dans l'image est $(1, 1, -1, -1)$. Par récurrence, on considère un s -uplet $(x_1, \dots, x_{s_1}, -y_1, \dots, -y_{s_2})$ qui n'est pas dans l'image de l'application résiduelle. Si tous les x_i, y_j sont égaux entre eux, le résultat est clair. Sinon on considère un graphe associé à ces éléments tel que l'élément minimal est sur une feuille et le poids du sommet adjacent est strictement supérieur. On obtient alors un élément qui n'est pas dans l'application résiduelle de $\Omega\mathcal{M}_0(s-3; (-1^{s-1}))$. Par récurrence ce $(s-1)$ -uplet possède au moins quatre éléments de norme 1. Cela implique que l'élément minimal est de norme 1 et donc qu'il existe au moins quatre éléments de norme 1 dans le s -uplet originel.

L'équation (1.4) est clairement satisfaite pour l'unique élément $(1, 1, -1, -1)$ qui n'est pas dans l'application résiduelle de $\Omega\mathcal{M}_0(2; (-1^4))$. Supposons maintenant par récurrence qu'elle

est satisfaite pour tous les t -uplet qui ne sont pas dans l'application résiduelle des strates $\Omega\mathcal{M}_0(t-2; (-1^t))$ avec $4 \leq t < s$. Considérons l'élément $(x_1, \dots, x_{s_1}, -y_1, \dots, -y_{s_2})$ qui n'est pas dans l'image de l'application résiduelle de $\Omega\mathcal{M}_0(s-2; (-1^s))$. Si les résidus sont tous égaux entre eux, la borne est clairement satisfaite. Sinon, comme il existe un élément du s -uplet égal à 1, on peut supposer que $x_{s_1} > 1$ et $y_{s_2} = 1$. En enlevant le résidu $-y_{s_2}$ du s -uplet et en l'ajoutant à x_{s_1} , on obtient un $(s-1)$ -uplet qui n'est pas dans l'application résiduelle. Par récurrence, il vérifie l'équation (1.4) avec $s-1$ termes. Comme $y_{s_2} = 1$, on a

$$\sum_{j=1}^{s_2} y_j = 1 + \sum_{j=1}^{s_2-1} y_j \leq 1 + (s-1) - 2 = s-2.$$

Ceci démontre par récurrence la borne de l'équation (1.4).

Nous montrons maintenant qu'un élément de la forme $(x_1, \dots, x_{s_1}, -y_1, \dots, -y_{s_2})$ avec x_i et y_j des entiers premiers entre eux qui satisfait l'équation (1.4) n'est pas dans l'image de l'application résiduelle de $\Omega\mathcal{M}_0(s-2; (-1^{s-2}))$.

Pour $s = 4$, l'unique élément qui satisfait l'équation (1.4) est $(1, 1, -1, -1)$ qui n'est pas dans l'image de $\mathfrak{R}_0(2; (-1^4))$. Supposons par l'absurde qu'il existe $(x_1, \dots, x_{s_1}, -y_1, \dots, -y_{s_2})$ qui satisfait l'équation (1.4) et qui appartient à l'image de l'application résiduelle. Nous supposons de plus que $s = s_1 + s_2$ est minimal pour cette propriété. Par le lemme 3.6, il existe un graphe de connexions associé à ce s -uplet. On suppose que y_{s_2} est sur une feuille du graphe connectée au sommet correspondant à x_{s_1} . On considère alors le graphe obtenue en enlevant la feuille y_{s_2} du graphe de connexions. Par définition on obtient un graphe de connexions pour le $(s-1)$ -uplet $(x_1, \dots, x_{s_1-1}, x_{s_1} - y_{s_2}, -y_1, \dots, -y_{s_2-1})$. Cet élément satisfait l'équation (1.4) avec $s-1$ pôles. Donc par hypothèse de minimalité sur s , il n'est pas dans l'image de l'application résiduelle. Cela implique que le graphe obtenu en enlevant la feuille de y_{s_2} n'est pas de connexions, ce qui est absurde. \square

En utilisant cette caractérisation nous présentons dans la table 1 les éléments de l'espace résiduel qui ne sont pas dans l'image de l'application résiduelle des strates $\Omega\mathcal{M}_0(s-2; (-1^s))$ pour $s \leq 6$.

Strate	Éléments pas dans l'image de l'application résiduelle (modulo \mathbb{C}^*)
$\Omega\mathcal{M}_0(0; (-1^2))$	\emptyset
$\Omega\mathcal{M}_0(1; (-1^3))$	\emptyset
$\Omega\mathcal{M}_0(2; (-1^4))$	$(1, 1, -1, -1)$
$\Omega\mathcal{M}_0(3; (-1^5))$	$(2, 1, -1, -1, -1)$
$\Omega\mathcal{M}_0(4; (-1^6))$	$(1, 1, 1, -1, -1, -1), (2, 1, 1, -2, -1, -1), (2, 2, -1, -1, -1, -1), (3, 1, -1, -1, -1, -1)$

TABLE 1. Les éléments qui ne sont pas des résidus de différentielles des strates $\Omega\mathcal{M}_0(s-2; (-1^s))$ avec $s \leq 6$.

Nous passons maintenant au cas des strates possédant au moins deux zéros. Elle s'obtient en utilisant le résultat pour les strates avec un unique zéro. Afin de décrire l'image de l'application résiduelle, nous faisons appel à la notion de différentielle stable rappelée dans la section 2.2.

Lemme 3.9. *Soit $\Omega\mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; (-1^s))$ une strate de genre zéro avec s pôles simples et $n \geq 2$ zéros. Le s -uplet (r_1, \dots, r_s) est dans l'image de l'application résiduelle si et seulement s'il existe une différentielle stable de genre zéro (X, ω) telle que :*

- (1) la restriction de ω à chaque composante irréductible de X possède un pôle simple aux points nodaux ;
- (2) la restriction de ω à la partie lisse de la courbe stable X possède des singularités d'ordres $(a_1, \dots, a_n; (-1^s))$ et les résidus aux pôles sont (r_1, \dots, r_s) ;

(3) la restriction de ω à chaque composante irréductible de X possède un unique zéro.

Démonstration. Soit $r := (r_1, \dots, r_s) \in \mathcal{R}_0(\mu)$ un élément de l'espace résiduel de la strate $\Omega\mathcal{M}_0(a_1, \dots, a_n; (-1^s))$. Supposons que r soit dans l'image de l'application résiduelle de cette strate. Montrons l'existence d'une différentielle stable vérifiant les conditions du lemme 3.9. Soit ω une différentielle de $\Omega\mathcal{M}_0(\mu)$ ayant pour résidus r . Quitte à perturber ω sans changer les résidus, on peut supposer qu'il n'existe pas de liens selles horizontaux entre deux singularités coniques distinctes. En effet, le lieu de la strate $\Omega\mathcal{M}_0(\mu)$ où les résidus sont r est une variété orbifold de dimension $n - 1$ munie d'un atlas où les coordonnées sont les périodes des cycles de l'homologie relative (voir [Bai+19]). Comme tous les résidus sont réels, toute demi-droite horizontale issue d'une singularité conique heurte cette même singularité en temps fini. Coupons la surface plate associée à ω le long de ces liens selles. On obtient une union disjointe de cylindres et de demi-cylindres infinis.

La hauteur des cylindres d'aire finie peut être choisie arbitrairement sans changer la strate et les résidus. En faisant tendre toutes les hauteurs de ces cylindres vers l'infini, on obtient une différentielle stable. De plus, comme chaque zéro est relié à un autre par un cylindre, il y a précisément un zéro sur chaque composante irréductible de cette différentielle.

L'autre implication est claire une conséquence directe du lemme 2.2. En effet, on obtient une différentielle dans la strate $\Omega\mathcal{M}_0(\mu)$ ayant les résidus r par le lissage de la différentielle stable satisfaisant les conditions du lemme 3.9. \square

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le point ii) du théorème 1.2 pour toutes les strates avec $n \geq 2$ zéros.

Démonstration. Considérons tout d'abord un s -uplet $(x_1, \dots, x_{s_1}, -y_1, \dots, -y_{s_2})$ avec x_i et y_j des entiers premiers entre eux tels que $\sum_{i=1}^{s_1} x_i = \sum_{j=1}^{s_2} y_j > \max(a_1, \dots, a_n)$. On supposera sans perte de généralité que $s_1 \leq s_2$. Si $n = 1$, on a déjà montré qu'il existe une différentielle avec ces invariants locaux. On supposera par récurrence que le résultat est vrai pour $n - 1$. Considérons la différentielle stable formée de la forme suivante. Elle possède deux composantes irréductibles X_1 et X_2 avec un nœud entre les deux. La composante X_1 qui contient le zéro d'ordre maximal, nous supposons qu'il s'agit de a_n , et la composante X_2 qui contient les zéros a_1, \dots, a_{n-1} .

Si $a_n \geq s_1 + 2$, alors la différentielle sur X_1 contient tous les pôles dont les résidus sont x_i . Les pôles dont les résidus sont y_j sont répartis entre les deux composantes X_1 et X_2 . Montrons qu'il existe une différentielle stable sur cette courbe stable satisfaisant les conditions du lemme 3.9. Sur la composante X_1 , on a $\sum x_i > a_n$, donc le cas $n = 1$ donne l'existence d'une telle différentielle. Sur X_2 , on a un unique pôle avec un résidu positif (au point nodal). Cela donne l'existence de la différentielle sur la composante X_2 .

Si $a_n < s_1 + 2$, alors on met $a_n + 2$ pôles dont les résidus sont positifs sur la composante X_1 et les autres pôles sur la composante X_2 . Sur X_1 , l'existence de la différentielle suit du fait qu'il n'y a qu'un pôle de résidu négatif. Sur X_2 , on a $\sum y_j > a_n \geq \max(a_1, \dots, a_{n-1})$ et donc l'existence de la différentielle possédant les invariants souhaités est donnée par récurrence.

Réciproquement, on considère un s -uplet avec $\sum_{i=1}^{s_1} x_i = \sum_{j=1}^{s_2} y_j \leq \max(a_1, \dots, a_n)$. Nous considérons un tel s -uplet tel qu'il existe une différentielle avec ces invariants tel que n est minimal.

On considère une différentielle stable satisfaisant les conditions du lemme 3.9. Considérons une composante X_1 qui est reliée au reste de la courbe par un unique nœud, i.e. cette composante correspond à une feuille du graphe dual. Comme ce graphe contient au moins deux feuille, nous supposons que X_1 ne contient pas a_n .

Supposons que le résidu de la restriction de la différentielle à X_1 possède un résidu positif au point nodal. Par stabilité, la restriction de la différentielle au complémentaire \bar{X} de X_1 possède un pôle avec un résidu négatif au point nodal correspondant. Cette restriction satisfait aux conditions du lemme 3.9 (en considérant le point nodal avec X_1 comme un

pôle de la partie lisse). Supposons que les \tilde{s}_1 premiers résidus positifs appartiennent à \tilde{X} , on a $\sum_{i=1}^{\tilde{s}_1} \leq \sum_{i=1}^{s_1} \leq a_n$. Comme il y a $n - 1$ zéros sur \tilde{X} , cela contredit la minimalité de notre exemple. \square

Nous terminons cette section par un exemple qui illustre les construction du lemme 3.9.

Exemple 3.10. Dans cet exemple, nous donnons des différentielles dans $\Omega\mathcal{M}_0(1, 3; (-1^6))$ et $\Omega\mathcal{M}_0(2, 2; (-1^6))$ dont les résidus sont $(2, 1, 1, -1, -1, -2)$ dans la figure 7. Les graphes duaux des différentielles stables que l'on obtient en faisant tendre les hauteurs des cylindres fini vers l'infini. Ces différentielles stables sont celles données dans le lemme 3.9. Les pôles simples correspondent aux demi-arêtes et les labels aux résidus de ces pôles. On peut remarquer que ces résidus ne sont pas dans l'image de $\mathfrak{R}_0(4; (-1^6))$.

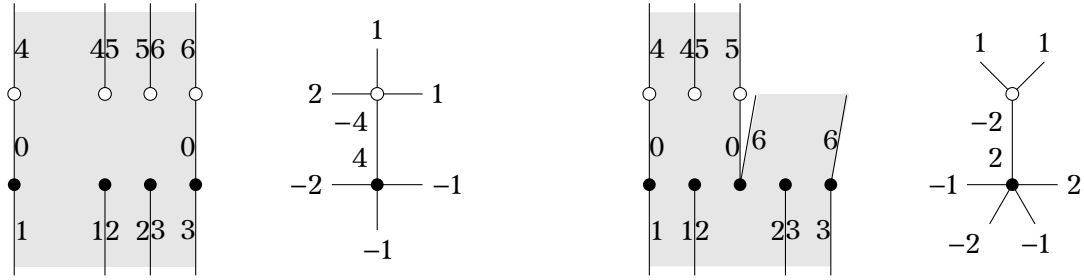


FIGURE 7. Différentielles dans $\Omega\mathcal{M}_0(2, 2; (-1^6))$ et $\Omega\mathcal{M}_0(1, 3; (-1^6))$ avec résidus $(2, 1, 1, -1, -1, -2)$ et leurs graphes duaux des différentielles stables associées.

4. LES DIFFÉRENTIELLES SUR LES SURFACES DE GENRE SUPÉRIEUR

Dans cette section nous prouvons le théorème 1.1 qui énonce la surjectivité de l'application résiduelle de chaque composante connexe en genre $g \geq 1$. Nous allons tout d'abord traiter le cas des différentielles sur les surfaces de Riemann de genre 1 dans la section 4.1. Le cas des strates de genre supérieur ou égal à 2 est donné dans la section 4.2.

4.1. Différentielles en genre 1. En genre un, Boissy à montré dans la section 4.2 de [Boi15] que les composantes connexes des strates sont caractérisées par le nombre de rotation $\text{rot}(S)$ des surfaces de translations associées. Pour une surface de translation S définie par une différentielle méromorphe de $\Omega\mathcal{M}_1(a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p)$ avec une base symplectique de lacets lisses de l'homologie (α, β) le nombre de rotation est

$$\text{rot}(S) := \text{pgcd}(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_p, \text{Ind}(\alpha), \text{Ind}(\beta)),$$

où $\text{Ind}(\alpha)$ est l'indice de l'application de Gauss du lacet α . On a le résultat suivant dû à Boissy.

- i) Si $n = p = 1$, la strate est $\Omega\mathcal{M}_1(a; -a)$ avec $a \geq 2$ et chaque composante connexe correspond à un nombre de rotation qui est un diviseur strict de a .
- ii) Sinon, il existe une composante connexe correspondant à chaque nombre de rotation qui est un diviseur de $\text{pgcd}(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_p)$.

Nous commençons par montrer la surjectivité de l'application résiduelle $\mathfrak{R}_1(s; (-1^s))$ avec $s \geq 2$. Par le résultat précédent, ces strates sont connexes.

Lemme 4.1. *L'application résiduelle de la strate $\Omega\mathcal{M}_1(s; (-1^s))$ est surjective pour $s > 1$.*

Démonstration. Considérons la strate $\Omega\mathcal{M}_1(s; (-1^s))$, avec $s > 1$ et $r := (r_1, \dots, r_s)$ un élément de l'espace résiduel $\mathfrak{R}_1(s; (-1^s))$. Prenons un tore plat S_1 tel que le lien selle le plus petit est strictement supérieur à $\sum |r_i|$. Nous enlevons de S_1 le polygone résiduel $\mathfrak{P}(-r)$. Cette

opération est réalisable par notre hypothèse sur la longueur des liens selles de S_1 . Pour chacun des pôles P_i , nous prenons une partie polaire d'ordre 1 associée à r_i . Nous collons le bord de ces parties polaires au bord de $S_1 \setminus \mathfrak{P}(r)$ par translation. La construction est représentée par le dessin de la figure 8. On vérifie sans problème que la surface ainsi obtenue est de genre 1 et possède une unique singularité conique. \square

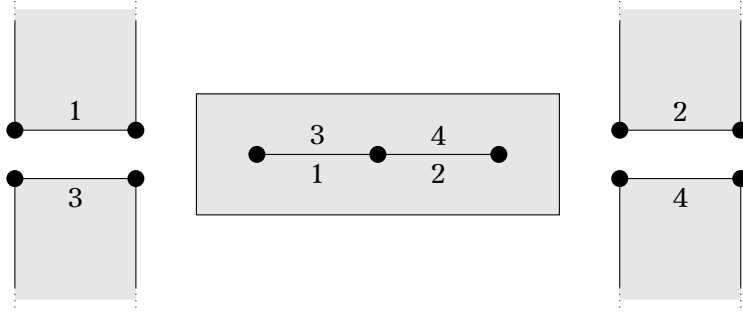


FIGURE 8. Une différentielle de $\Omega\mathcal{M}_1(4; (-1^4))$ dont les résidus sont $(1, 1, -1, -1)$.

Nous montrons maintenant la surjectivité de l'application résiduelle restreinte à chaque composante connexe de genre supérieur ou égal à un.

Preuve du théorème 1.1 en genre 1. Nous fixons une strate $\Omega\mathcal{M}_1(\mu)$ de genre 1 avec la partition $\mu := (a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$ et un élément r de l'espace résiduel $\mathcal{R}_1(\mu)$. Commençons par remarquer qu'il suffit de montrer le résultat pour les strates avec un unique zéro. En effet, la proposition 7.1 de [Boi15] implique que dans chaque composante connexe de strates avec $n \geq 2$ zéros, il existe une différentielle obtenue en éclatant le zéro d'une différentielle avec un unique zéro. Le résultat se déduit car la proposition 2.4 montre que cette opération ne modifie pas les résidus aux pôles. Dans la suite nous supposons que $n = 1$.

Dans le cas où $s \neq 0$, les strates sont connexes. Si $p = 0$, la surjectivité de l'application résiduelle a été montrée dans le lemme 4.1. Dans le cas où $p \neq 0$, alors le théorème 1.2 montre qu'il existe une différentielle dans $\Omega\mathcal{M}_0(a - 2; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$ dont les résidus sont r . On obtient une différentielle dans $\Omega\mathcal{M}_1(\mu)$ ayant pour résidus r en cousant une anse à ces différentielles (voir la proposition 2.5).

À partir de maintenant, nous supposons que $s = 0$, i.e. que les strates paramètrent des différentielles dont les pôles sont d'ordres $b_i \geq 2$. La proposition est trivialement vraie lorsqu'il y a un unique pôle. On supposera donc que $p \geq 2$ dans la suite de la preuve. La proposition 6.1 de [Boi15] nous indique que chaque strate peut s'obtenir en cousant une anse à différentielles de genre 0. De plus, le théorème 1.2 indique qu'il existe des différentielles dans ces strates dont les résidus sont $(r_1, \dots, r_p) \in \mathcal{R}_0(\mu) \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. La couture d'anse à partir de ces strates permet d'obtenir une différentielle dans chaque composante connexe de $\Omega\mathcal{M}_1(a; -b_1, \dots, -b_p)$ dont les résidus sont $(r_1, \dots, r_p) \neq (0, \dots, 0)$. Il reste donc à construire dans chaque composante connexe des strates $\Omega\mathcal{M}_1(a; -b_1, \dots, -b_p)$ une différentielle dont tous les résidus sont nuls.

Dans ce cas, nous considérons la construction suivante. Pour tous les pôles, nous prenons une partie polaire de type b_i associée aux vecteurs $(1; 1)$. On colle le bord supérieur de P_i au bord inférieur de P_{i+1} . Il reste deux liens selles homologues que l'on relie par un cylindre. La surface obtenue possède les invariants locaux souhaités.

Une base de l'homologie est donnée par une géodésique périodique α du cylindre (donc d'indice zéro) et le lacet β suivant. Il coupe α dans le cylindre puis le lien selle au bord du domaine polaire P_p , puis tourne à gauche avant de ressortir de ce domaine polaire en coupant l'autre lien selle et ainsi de suite. Le cas de la strate $\Omega\mathcal{M}_1(6; -3, -3)$ est illustré

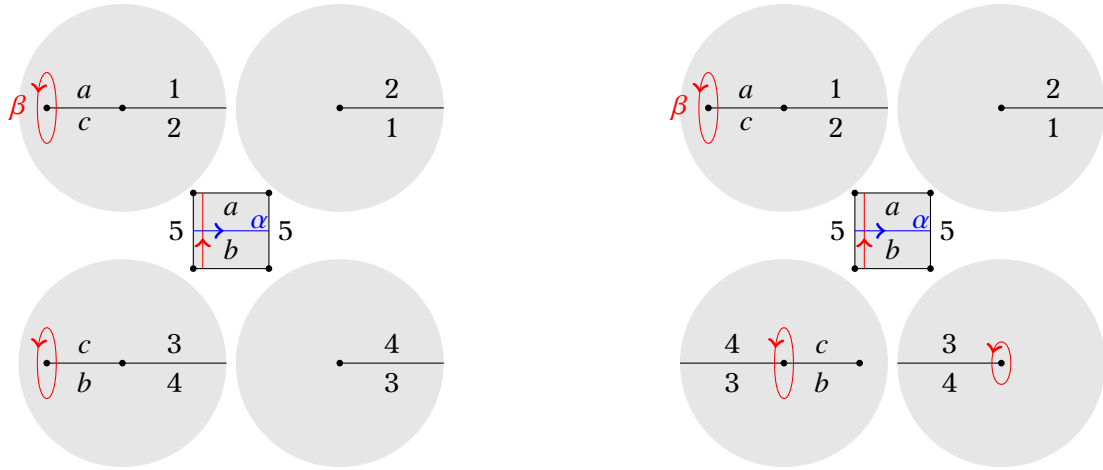


FIGURE 9. Une différentielle de la strate $\Omega\mathcal{M}_1(6; -3, -3)$ dont les résidus sont $(0, 0)$ et de nombre de rotation 1 à gauche et 3 à droite.

dans la figure 9. Remarquons que changer le type τ d'une partie polaire change d'autant l'indice de β . On peut donc obtenir pour β tous les indices dans $J = [p, -p + \sum_{i=1}^p b_i]$. À moins que la totalité des pôles ne soient d'ordre -2 , on obtient ainsi toutes les composantes connexes de la strate. En effet, si $\mu = (a; -3, -2, \dots, -2)$, alors la strate est connexe. Il suffit donc de montrer que la longueur de l'intervalle J est supérieur ou égale à $\min_i b_i$, si $(b_1, \dots, b_p) \neq (2, \dots, 2)$ et $(b_1, \dots, b_p) \neq (3, 2, \dots, 2)$. Cette inégalité est clairement satisfaite dès que $p \geq 2$ et qu'il existe un $b_i \geq 4$ ou deux $b_j \geq 3$.

Dans une strate minimale avec uniquement des pôles d'ordre -2 , il y a exactement deux composantes connexes. La construction qui précède ne permet d'obtenir que la composante dont le nombre de rotation a la même parité que p . On propose alors une deuxième construction. On prend $p-1$ parties polaires et on les colle comme précédemment. La dernière partie polaire est associée aux vecteurs $(i, 1; 1, i)$. On identifie les vecteurs i entre eux et les deux autres bords comme précédemment. Cette construction est illustrée dans la figure 10 dans le cas de la strate $\Omega\mathcal{M}_1(4; -2, -2)$. Le lacet β est défini comme précédemment et a pour indice p . Le lacet α connecte le milieu de des segments v sans sortir du domaine polaire de P_p . Son indice est donc 1. On construit une différentielle avec n'importe quels résidus dans la composante connexe dont le nombre de rotation est 1.

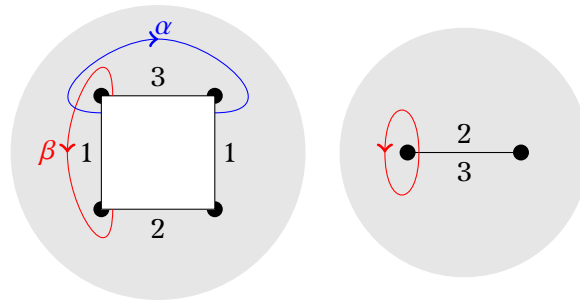


FIGURE 10. Une différentielle de $\Omega\mathcal{M}_1(4; -2, -2)$ avec résidus $(0, 0)$ dont le nombre de rotation est 1.

Il reste le cas des composantes connexes de $\Omega\mathcal{M}_1(2p; (-2^p))$ avec p impair pour lesquelles le nombre de rotation est 2. On reprend la construction précédente pour les $p-2$ premiers pôles. On associe au pôle P_{p-1} partie polaire est associée aux vecteurs $(i, 1; 1, i)$. On associe

à P_p la partie polaire associée à $(i; i)$. On identifie les bords comme précédemment. Cette construction est illustrée dans la figure 11 dans le cas de la strate $\Omega\mathcal{M}_1(6; -2, -2, -2)$. Ainsi, les lacets analogues à ceux de la construction précédente auront pour indices respectifs $p-1$ et 2. Le nombre de rotation de la surface est donc 2. \square

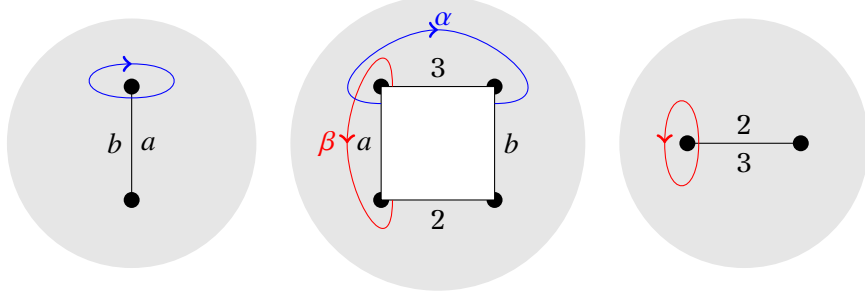


FIGURE 11. Une différentielle de $\Omega\mathcal{M}_1(6; -2, -2, -2)$ avec résidus $(0, 0, 0)$ dont le nombre de rotation est 2.

4.2. Différentielles en genre supérieur ou égal à 2. Les composantes connexes des strates ont été classifiées par Boissy dans le théorème 1.2 de [Boi15]. La preuve du théorème 1.1 dans le cas $g \geq 2$ n'utilise pas la description des composantes connexes mais repose sur le fait que chaque composante connexe peut s'obtenir via les opérations de couture d'anse et éclatement d'un zéro.

Preuve du théorème 1.1 en genre $g \geq 2$. Commençons par le cas des strates avec un unique zéro. Plus précisément, fixons une partition $\mu := (a; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$ de $2g - 2$ avec $g \geq 2$ et un uplet r dans l'espace résiduel $\mathcal{R}_g(\mu)$. Par le résultat de la section 4.1, chaque composante connexe de la strate $\Omega\mathcal{M}_1(a - 2g; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$ contient une différentielle ω dont les résidus sont r . De plus, la proposition 6.1 de [Boi15] montre que chaque composante connexe d'une strate de genre $g \geq 2$ peut être obtenue par l'ajout d'une anse à un zéro d'une différentielle de genre $g - 1$. La proposition 2.5 montre que la couture d'anse ne modifie pas les résidus. On obtient donc une différentielle dans la strate $\Omega\mathcal{M}_g(\mu)$ dont les résidus sont r en cousant successivement $g - 1$ anses à l'unique zéro de ω .

Nous considérons maintenant le cas des strates avec $n \geq 2$ zéros. Fixons une partition quelconque $\mu := (a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$ de $2g - 2$ avec $g \geq 2$. La proposition 7.1 de [Boi15] implique que l'éclatement du zéro de différentielles $\Omega\mathcal{M}_g(\sum a_i; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$ permet d'obtenir une différentielle dans chaque composante connexe de $\Omega\mathcal{M}_g(\mu)$. La proposition 2.4 montre que cette opération ne modifie pas les résidus aux pôles. La surjectivité de la restriction de l'application résiduelle $\mathfrak{R}_g(\mu)$ à chaque composante connexe est donc induite par la surjectivité de l'application résiduelle sur chaque composantes connexes de la strate $\Omega\mathcal{M}_g(\sum a_i; -b_1, \dots, -b_p; (-1^s))$ que nous avons montré au paragraphe précédent. \square

5. APPLICATIONS

Cette section est dédiée à la preuve des applications énoncées dans la section 1.2. La section 5.1 donne la preuve de la proposition 1.3 sur les points de Weierstraß et la section 5.2 la preuve de la proposition 1.4 sur les cylindres dans les surfaces de translation.

5.1. Limites des points de Weierstraß. L'étude des limites des points de Weierstraß dans la compactification de Deligne-Mumford a pris une grande ampleur grâce aux travaux d'Eisenbud et Harris sur les séries linéaires limites (voir e.g. [EH87]). L'une des limites de leur méthode est de se restreindre aux courbes de type compact. Esteves et Medeiros l'ont étendue aux courbes ayant deux composantes dans [EM02]. Nos résultats et la description de la

compactification de la variété d'incidence de [Bai+18] permettent en théorie une description complète des limites de points de Weierstraß dans $\overline{\mathcal{M}}_{g,1}$. Nous illustrons cela dans les cas de la proposition 1.3.

Nous montrons tout d'abord que l'adhérence du lieu de Weierstraß ne rencontre pas celui des courbes stables X où g courbes elliptiques sont attachées à un \mathbb{P}^1 contenant le point marqué (voir le théorème 3.1 de [EH87]). Ces courbes sont représentées à gauche de la figure 12.

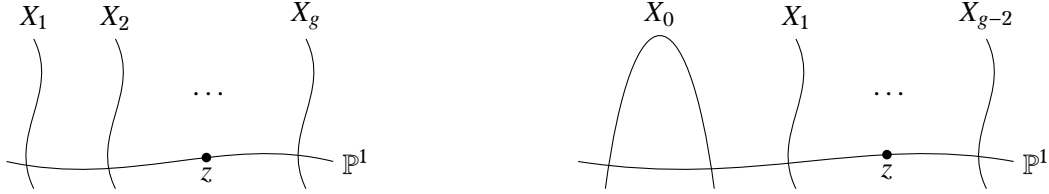


FIGURE 12. Les courbes pointées considérées dans la proposition 1.3. Les courbes X_i sont de genre 1.

Par [Bai+18, Section 3.6], l'adhérence du lieu de Weierstraß dans $\overline{\mathcal{M}}_{g,1}$ coïncide avec la projection de la compactification de la variété d'incidence de $\Omega\mathcal{M}_g(g, 1, \dots, 1)$. D'après le théorème 1.3 de l'article loc. cit., il suffit de montrer qu'il n'existe pas de différentielle entrelacée lissable sur une courbe semi-stablement équivalente à X .

Soit ξ une différentielle entrelacée sur (une courbe semi-stablement équivalente à) X . La restriction ξ_0 de ξ à \mathbb{P}^1 possède un zéro d'ordre supérieur ou égal à g . De plus, ξ_0 possède une singularité d'ordre supérieur ou égal à -2 (et distinct de -1) aux points nodaux de \mathbb{P}^1 . En notant $-b_i$ l'ordre des pôles aux points nodaux, on $\sum(b_i - 1) \leq g$. Donc la différentielle ξ_0 sur \mathbb{P}^1 vérifie l'inégalité (1.3). Le théorème 1.2 implique qu'au moins deux pôles possèdent des résidus non nuls. La condition résiduelle globale de la définition 1.2 de [Bai+18] n'est donc pas satisfaite et ξ n'est pas lissable.

Maintenant, nous montrons que l'adhérence du lieu de Weierstraß coupe le lieu de $\overline{\mathcal{M}}_{g,1}$ donné de la façon suivante. Ces courbes sont formées d'un \mathbb{P}^1 contenant le point marqué attaché à $g-2$ courbes elliptiques X_1, \dots, X_{g-2} par un unique point et à une courbe elliptique X_0 par deux points. Elles sont représentées à droite de la figure 12.

Il suffit construire une différentielle entrelacée lissable de type $(g, (1^{g-2}))$ sur une de ces courbes. Sur toutes les courbes elliptiques, on prend la différentielle holomorphe. Sur la courbe projective, on prend une différentielle dans $\Omega\mathcal{M}_0(g, (1^{g-2}); (-2^g))$ avec $g-2$ résidus nuls. Une telle différentielle existe par le théorème 1.2. On colle alors la courbe elliptique X_0 aux deux pôles dont les résidus ne sont pas nuls. Les autres courbes elliptiques sont collées aux pôles dont les résidus sont nuls. Le théorème 1.3 de [Bai+18] implique que cette différentielle entrelacée est lissable.

5.2. Cylindres dans une surface plate. Un cylindre dans une surface de translation est un cylindre composé de géodésiques fermées parallèles et dont le bord est formé de connexions de selles. Naveh a montré dans [Nav08] que le nombre maximal de cylindres disjoints dans une surface de la strate $S := \Omega\mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n)$ est $g + n - 1$.

Nous décrivons les périodes possibles des circonférences de ces cylindres, prouvant la proposition 1.4. On fixe $(\lambda_1, \dots, \lambda_t) \in (\mathbb{C}^* / \{\pm 1\})^t$ pour le reste de cette section.

Supposons qu'il existe une différentielle ω de S qui possède une famille de t cylindres disjoints de circonférences respectives $\lambda_1, \dots, \lambda_t$. Nous montrons l'existence d'une différentielle stable dont les zéros sont d'ordres (a_1, \dots, a_n) avec des pôles simples aux nœuds dont les résidus sont $\pm\lambda_i$. Coupons ω le long d'une géodésique périodique dans chaque

cylindre. Nous pouvons alors remplacer les deux demi-cylindres obtenus par deux demi-cylindres infinis de même circonférence. On obtient donc une différentielle entrelacée avec des pôles simples aux nœuds. De plus, les résidus de ces pôles sont égaux à plus ou moins la circonférence des cylindres. On en déduit le sens direct de la proposition 1.4.

La direction réciproque est une application directe du lissage des nœuds des différentielles stables avec pôles simples aux nœuds (voir le lemme 2.2).

Ce résultat permet de comprendre parfaitement les circonférences des cylindres sur une surface de translation pour $t < g$ et dans le cas minimal pour $t = g$.

Corollaire 5.1. *Tous les t -uplets de $\mathbf{C}^*/\{\pm 1\}$ avec $t < g$ sont réalisables comme périodes des circonférences de cylindres disjoints d'une différentielle de $\Omega\mathcal{M}_g(a_1, \dots, a_n)$.*

Un g -uplet de $\mathbf{C}^/\{\pm 1\}$ est constitué des périodes des circonférences de cylindres disjoints d'une différentielle de $\Omega\mathcal{M}_g(2g - 2)$ si et seulement si il n'est pas de la forme $c \cdot (\lambda_1, \dots, \lambda_g)$ avec c dans \mathbf{C}^* et $(\lambda_1, \dots, \lambda_g) \in \mathbf{N}$ tel que $\sum_{i=1}^g \lambda_i \leq 2g - 2$.*

Démonstration. Si $t < g$, il existe une différentielle stable sur une courbe stable irréductible qui satisfait les hypothèses de la proposition 1.4. En effet, le théorème 1.1 donne une différentielle ω dans la strate $\Omega\mathcal{M}_{g-t}(a_1, \dots, a_n; (-1^{2t}))$ dont les résidus sont $\pm\lambda_i$. On forme la différentielle stable de la proposition 1.4 en collant deux pôles simples dont les résidus sont opposés.

On considère maintenant le cas où $t = g$ et dans la strate $\Omega\mathcal{M}_g(2g - 2)$. Supposons que le g -uplet n'est pas de la forme $c \cdot (\lambda_1, \dots, \lambda_g)$ avec c dans \mathbf{C}^* et $(\lambda_1, \dots, \lambda_g) \in \mathbf{Z}$ tel que $\sum_{i=1}^g \lambda_i \leq 2g - 2$. Le point ii) du théorème 1.2 donne l'existence d'une différentielle dans $\Omega\mathcal{M}_0(2g - 2; (-1^{2g}))$ dont les résidus sont $\pm\lambda_i$. On forme la différentielle stable de la proposition 1.4 en collant deux pôles simples dont les résidus sont opposés. Réciproquement, supposons que le g -uplet n'est pas de la forme donné par le corollaire 5.1. Notons tout d'abord que toutes les différentielles stables de la proposition 1.4 sont irréductibles dans ce cas. En effet, chaque composante contient au moins un zéro de la différentielle. En normalisant la courbe stable sous jacente on obtient une différentielle de $\Omega\mathcal{M}_0(2g - 2; (-1^{2g}))$ dont les résidus sont $\pm\lambda_i$. Cela contredit le point ii) du théorème 1.2. \square

Pour terminer, nous montrons la proposition 1.5 qui affirme l'existence une différentielle avec $g+n-1$ cylindres disjoints dans chaque composante connexe des strates de différentielles holomorphes. La classification des composantes connexes est donnée dans [KZ03]. Nous rappelons simplement ici que les composantes connexes sont classifiées par hyperellipticité et parité.

La preuve de la proposition 1.5 suit le schéma suivant. Dans le cas des strates minimales, i.e. avec $n = 1$, nous construisons une différentielle stable sur une courbe algébrique irréductible de genre géométrique 0 avec g nœuds dont le lissage par le lemme 2.2 donne une différentielle dans la composante souhaitée. Chaque nœud correspond à un cylindre sur la différentielle lissée. De cette manière, on obtient la borne souhaitée dans toutes les composantes de la strate minimale. Les strates non minimales se traitent en dégénérant les différentielles stables du cas minimal, puis en lissant ces différentielles.

Commençons par la strate $\Omega\mathcal{M}_3(4)$ qui possède deux composantes : l'une hyperelliptique et l'autre impaire. Considérons trois nombres réels strictement positifs r_1, r_2, r_3 non commensurables entre eux et les parties polaires d'ordre 1 associées à $(\pm r_i; \emptyset)$. Collons successivement sur un segment les cylindres associés à r_i avec i croissant. Sur la partie inférieure du segment, on colle successivement les cylindres associés à $-r_3, -r_2$ et $-r_1$ dans le cas hyperelliptique et $-r_2, -r_3$ et $-r_1$ dans le cas impair. Les différentielles possédant les propriétés souhaitées sont obtenues en lissant les différentielles stables construites en collant les points à l'infini des cylindres de même circonférence.

Dans le cas $g \geq 4$ nous construisons une différentielle qui contient g cylindres dans chacune des trois composantes de $\Omega\mathcal{M}_g(2g - 2)$. Dans la suite, nous décrirons uniquement

les normalisations des différentielles stables dont le lissage possède ces propriétés. Considérons g nombres réels strictement positifs r_i non commensurables entre eux. Prenons les $2g$ parties polaires d'ordre 1 associées respectivement à $(\pm r_i; \emptyset)$. On colle successivement sur un segment les g cylindres positifs associés à r_i avec i croissant. Sur la partie inférieure de ce segment on colle successivement les cylindres associés à $-r_i$ avec i décroissant dans le cas hyperelliptique. Pour les composantes de parité, nous collons les cylindres associés à $-r_i$ dans les ordres $g, 1, 2, \dots, g-1$ et $g, 1, 2, \dots, g-3, g-1, g-2$. Ces deux constructions sont illustrées dans la figure 13.



FIGURE 13. Différentielles stables dans le bord des composantes impaires et paires de la composante $\Omega\mathcal{M}_4(6)$.

Les deux différentielles ainsi formées sont clairement non hyperelliptiques. Il reste donc à vérifier qu'elles sont de parités distinctes. Nous décrivons des lacets qui forment une base symplectique de l'homologie sur la différentielle lissée. Les g premiers lacets α_i sont donnés par une géodésique périodique dans chaque cylindre associé à r_i . Les g autres lacets β_i sont des courbes qui vont du cylindre de résidu $-r_i$ à celui de résidu r_i en intersectant uniquement α_i . Un choix possible pour les β_i est représenté sur la figure 13. Les indices des α_i sont nuls. De plus, dans la première différentielle, on peut choisir pour $i \in \{1, \dots, g-1\}$ les β_i tels qu'ils n'intersectent pas les demi-droites verticales représentées sur la figure 13. Dans la seconde différentielle, c'est possible pour $i \in \{1, \dots, g-3, g-1\}$. Tous ces lacets sont d'indice nul. Dans les deux différentielles, pour joindre les cylindres d'indice g , on peut choisir un lacet d'indice $g-1$ comme représenté sur la figure 13. Enfin dans la seconde différentielle, on peut choisir β_{g-2} d'indice 1 comme représenté sur la figure 13. Donc les indices des courbes de ces deux familles diffèrent uniquement pour le lacet β_{g-2} . L'équation (4) de [KZ03] de la parité d'une différentielle en fonction des indices des courbes d'une base symplectique implique que ces deux différentielles sont de parités distinctes.

Enfin nous montrons qu'il existe une différentielle qui possède $g+n-1$ cylindres dans chaque composante connexe des strates avec $n \geq 2$ zéros. Pour cela, nous dégénérons les différentielles stables du cas minimal de la façon suivante. Soit a_1 un zéro d'ordre inférieur ou égal à $g-1$. Nous choisissons sur les différentielles précédentes a_1+1 pôles consécutifs dont les résidus sont de même signe. Puis nous ajoutons un cylindre vertical fini entre ces cylindres et les autres cylindres de la différentielle. Enfin nous faisons tendre la hauteur de ce cylindre vers l'infini. Des différentielles stables obtenues de manière similaire sont présentées dans la figure 7. On fait cette construction pour chaque zéro sur une composante irréductible de la différentielle stable qui possède suffisamment de pôles dont les résidus sont de même signe. Cette construction permet d'obtenir une différentielle au bord de chaque composante connexe. De plus, elle préserve la parité (et l'hyperellipticité dans le cas $\Omega\mathcal{M}_g(g-1, g-1)$) des différentielles stables. Comme cette opération ajoute un cylindre pour chaque zéro, la différentielle obtenue en lissant ces différentielles stables possède $g+n-1$ cylindres et appartient à la composante souhaitée.

RÉFÉRENCES

- [Bai+18] Matt BAINBRIDGE, Dawei CHEN, Quentin GENDRON, Samuel GRUSHEVSKY et Martin MÖLLER. *Compactification of strata of abelian differentials*. *Duke Math. J.* 167.12 (2018), p. 2347-2416.
- [Bai+19] Matt BAINBRIDGE, Dawei CHEN, Quentin GENDRON, Samuel GRUSHEVSKY et Martin MÖLLER. *Strata of k -differentials*. *Algebr. Geom.* 6.2 (2019), p. 196-233.
- [Boi15] Correntin BOISSY. *Connected components of the strata of the moduli space of meromorphic differentials*. *Comment. Math. Helv.* 90.2 (2015), p. 255-286.
- [EH87] David EISENBUD et Joe HARRIS. *Existence, decomposition, and limits of certain Weierstrass points*. *Invent. Math.* 87 (1987), p. 495-515.
- [Ere20] Alexandre EREMENKO. *Co-axial monodromy*. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.* (5) XX (2020), p. 619-634.
- [EM02] Eduardo ESTEVES et Nivaldo MEDEIROS. *Limit canonical systems on curves with two components*. *Invent. Math.* 149.2 (2002), p. 267-338.
- [Gen21] Quentin GENDRON. *Sur les nœuds de Weierstraß*. *Ann. Henri Lebesgue X* (2021), p. X-X.
- [GT17] Quentin GENDRON et Guillaume TAHAR. *Différentielles à singularités prescrites*. *ArXiv e-prints* (2017). arXiv : 1705.03240.
- [KZ03] Maxim KONTSEVICH et Anton ZORICH. *Connected components of the moduli spaces of Abelian differentials with prescribed singularities*. *Invent. Math.* 153.3 (2003), p. 631-678.
- [MS93] Howard MASUR et John SMILLIE. *Quadratic differentials with prescribed singularities and pseudo-Anosov diffeomorphisms*. *Comment. Math. Helv.* 68.2 (1993), p. 289-307.
- [Mul21] Scott MULLANE. *Strata of differentials of the second kind, positivity and irreducibility of certain Hurwitz spaces*. 2021. arXiv : 1910.07504.
- [MUW21] Martin MÖLLER, Martin ULIRSCH et Annette WERNER. *Realizability of tropical canonical divisors*. *J. Eur. Math. Soc.* 23.1 (2021), p. 185-217.
- [Nav08] Yoav NAVEH. *Tight upper bounds on the number of invariant components on translation surfaces*. *Isr. J. Math.* 165.1 (2008), p. 211-231.
- [Rey89] Eric REYSSAT. *Quelques aspects des surfaces de Riemann*. Birkhäuser, 1989, p. vii + 166.
- [Sai10] Henri Paul de SAINT-GERVAIS. *Uniformisation des surfaces de Riemann*. ENS Éditions, Lyon, 2010, p. 544.
- [Tah18] Guillaume TAHAR. *Counting saddle connections in flat surfaces with poles of higher order*. *Geom. Dedicata* 196.1 (2018), p. 145-186.

(Quentin Gendron) CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS, GUANAJUATO, GTO., AP 402, CP 36000, MÉXICO
Email address: quentin.gendron@cimat.mx

(Guillaume Tahar) INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU - UMR CNRS 7586
Current address: Faculty of Mathematics and Computer Science, Weizmann Institute of Science, Rehovot, 7610001, Israel
Email address: tahar.guillaume@weizmann.ac.il