# ПОДСЧЕТ КОМПОНЕНТ УРАВНЕНИЙ ПЕЛЛЯ-АБЕЛЯ С ПРИМИТИВНЫМ РЕШЕНИЕМ ЗАДАННОЙ СТЕПЕНИ

А. Б. Богатырёв; К. Гендрон

Н.Х.Абель в 1826 [1] рассмотрел диофантово уравнение Пелля в кольце многочленов. С тех пор уравнение

$$P^2(x) - D(x)Q^2(x) = 1 \qquad (1)$$

носит имена обоих ученых, Пелля и Абеля. Здесь $P(x)$ и $Q(x)$ – неизвестные многочлены от одной переменной и $D(x) := \prod_{e\in\mathsf{E}}(x-e)$ – заданный унимодальный комплексный многочлен степени $\deg D = |\mathsf{E}| := 2g+2$ без кратных корней. Общее уравнение (1) имеет только тривиальные решения $(P,Q) = (\pm1, 0)$. Для существования прочих решений на многочлен $D(x)$ нужно наложить дополнительные условия. Один вид этих условий был изобретен Абелем [1], другим мы будем пользоваться ниже. Для данного $D(x)$ есть решение с наименьшим $n := \deg P$, называемое примитивным. Оно порождает все другие решения $P$ композицией с классическими многочленами Чебышева и сменой знака.

Основной результат данной заметки – в нахождении числа компонент связности комплексных уравнений (1) с многочленом $D$ фиксированной степени $2g+2$, допускающих примитивное решение $P$ заданной степени $n$.

**Теорема 1** *Пусть $m := min(g, n-g-1)$ и $[\cdot]$ обозначает целую часть числа. Уравнение (1) не имеет примитивных решений степени $n < g$ и $n > 1$, если $g = 0$. В остальных случаях искомое число компонент равно $[m/2]+1$ при нечётном $n+g$ и $[(m+1)/2]$ при чётном $n+g$.*

Начнем с трансцендентного критерия разрешимости уравнения ПА [3] в терминах ассоциированной гиперэллиптической кривой $C$ рода $g$, двухточечной компактификации афинной кривой

$$(x,w) \in \mathbb{C}^2 : \qquad w^2 = D(x). \qquad (2)$$

Рассмотрим единственный дифференциал $\eta = (x^g + \dots)w^{-1}dx$ на $C$ с двумя полюсами на бесконечности, вычетами $\pm1$ и чисто мнимыми периодами. *Уравнение (1) допускает нетривиальное решение с $deg\ P = n$, если и только если все периоды $\eta$ на $C$ лежат в одной решетке $2\pi i\mathbb{Z}/n$.* Если уравнение ПА имеет решение степени $n$, то этот дифференциал имеет представление $\eta = n^{-1}d\log(P(x) + wQ(x))$, откуда и следует критерий.

Графическое исчисление, позволяющее эффективно контролировать периоды выделенного дифференциала в процессе деформации кривой (2) было предложено в [2, 3] для изучения т.н. (вещественных) экстремальных многочленов, где эта задача тоже возникает. Квадратичный дифференциал $\eta^2$ опускается с кривой $C$ на плоскость переменной $x$. Каждой кривой (2) мы сопоставим конечный плоский граф $\Gamma(C)$, получаемый в три этапа. ШАГ 1: Проведём все критические вертикальные траектории $\eta^2 < 0$ (см. [4]), проходящие через точки ветвления $e \in \mathsf{E}$. ШАГ 2: Соединим все нули дифференциала $\eta^2$, отличные от точек ветвления $e$, с уже проведенными вертикальными листами слоения, либо же с другими такими нулями, горизонтальными траекториями $\eta^2 > 0$. Из условий норомировки выделенного дифференциала, это построение корректно: мы получаем конечное число регулярных аналитических дуг. ШАГ 3: Снабдим каждое ребро его длиной в метрике $|\eta|$, порожденной выделенным дифференциалом.

Один из сопоставленных графов $\Gamma(C)$, возникающих при $g = 2$, показан справа на Рис. 1 с точностью до изотопии плоскости. Здесь черные вершины обозначают точки

Поддержано РНФ 21-11-00325 и отделением МЦФПМ в ИВМ РАН (Соглашение 75-15-2019-1624/2)

ветвления $e \in \mathsf{E}$ кривой, белые вершины обозначают нули дифференциала $\eta^2$, простые линии – это горизонтальные листы слоения, а двойные линии – вертикальные. Для заданного рода $g$ есть только конечное число допустимых топологических типов графов $\Gamma$, их можно перечислить аксиоматически. Графы $\Gamma(C)$ полностью определяются своими свойствами, так что всякий топологический планарный граф с весами, удовлетворяющий определенным пяти условиям [2, 3], происходит из единственной (с точностью до несущественной нормировки) кривой (2). Два из этих пяти условий такие: $\Gamma$ является деревом и общий вес вертикальных ребер равен $\pi$.

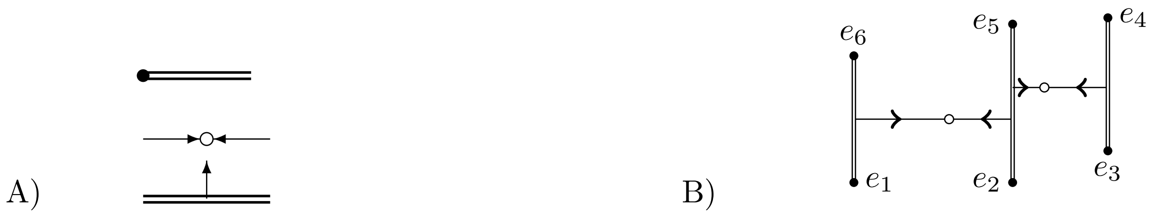


Рис. 1: A) Окрестности узлов устойчивых графов.   B) Пример графа для $g = 2$.

Все периоды выделенного дифференциала на кривой можно восстановить из графа: это целочисленные линейные комбинации весов его вертикальных ребер. В частности, можно определить изопериодические деформации, меняющие конформную структуру кривой (2) с локальным сохранением всех периодов дифференциала $\eta$. Используя изопериодические деформации графов, любую кривую $C$ можно привести к другой с графом стандартного вида. В качестве последних мы используем звезды, состоящие из вертикальных ребер со специальной последовательностью длин. Число стандартных форм и дает верхнюю оценку числа компонент в пространстве уравнений ПА.

Для завершения доказательства Теоремы 1 нужна нижняя оценка числа компонент. Рассмотрим графы $\Gamma$, вложимые в прямую. Они соответствуют вещественным многозонным многочленам Чебышева $P(x)$. Уже в этом классе есть много кривых, которые нельзя изопериодически преобразовать друг в друга. Чтобы доказать это мы используем действие группы кос $Br_{2g+2}$ на бинарные слова $(b_1, b_2, \dots) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2g+1}$, определяемое на элементарных косах $\beta_s$ группы [5]:

$$\beta_s \cdot (b_1, \dots, b_{s-1}, b_s, b_{s+1}, \dots)^t := (b_1, \dots, b_{s-1} + b_s, b_s, b_{s+1} - b_s, \dots), \qquad s = 1, \dots, 2g+1.$$

Это представление есть редукция по модулю 2 определенной специализации представления Бурау группы кос [5]. Если две кривых можно соединить изопериодической деформацией, то ассоциированные с ними периоды определяют две бинарных строки из одной орбиты группы кос. Оказывается, что в $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2g+1}$ есть достаточно много орбит группы кос, чтобы нижняя оценка на число компонент совпала с верхней.

Основной результат имеет следующее геометрическое приложение. Пространство модулей примитивных $k$-дифференциалов с единственным нулем порядка $2k$ на кривых рода 2 связно при $k = 3$ или чётном $k \geq 4$ и имеет две компоненты в остальных случаях.

Статья посвящается Ж.-П. Серру, без которого она бы не появилась.

### Список литературы

**[1]** N.H. Abel, Sur l'intégration de la formule différentielle $\frac{\rho dx}{\sqrt{R}}$, $R$ et $\rho$ étant des fonctions entières, J. reine u. angewand. Math., 1, pp. 105–144., 1826. **[2]** A.B. Bogatyrev, Combinatorial description of a moduli space of curves and of extremal polynomials, Sb. Math., 194:10 (2003), 1451–1473 **[3]** A.B. Bogatyrev, Extremal polynomials and Riemann surfaces, MCCME, 2005 and Springer, 2012. **[4]** K.Strebel, Quadratic differentials, Springer, 1984. **[5]** J. Birman, Braids, links, and mapping class groups, Princeton U. Press, 1975.

**А.Б. Богатырев (A.B. Bogatyrev)**
Инст. выч. математики РАН им. Г.И.Марчука,
*E-mail*: ab.bogatyrev@gmail.com

**Квентин Гендрон (Q.E.Gendron)**
Insituto de matemáticas de la UNAM
*E-mail*: quentin.gendron@im.unam.mx